Национальный исследовательский университет

Высшая школа экономики

Факультет экономики

Магистерская программа "Экономика"

Специализация "Макроэкономика и макроэкономическая политика"

Кафедра макроэкономического анализа

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«Пузыри, финансовые крахи и крупные игроки»

Выполнила

Студентка группы № 71Э (макро)

Миронова Е.А.

Научный руководитель
Доцент кафедры макроэкономического анализа, Ph. D.,
Арефьев Н.Г.

Москва 2013

Содержание

Введение

Начиная с 1970-х годов на рынках акций, валюты, товаров стала наблюдаться беспрецедентная волатильность цен. К настоящему моменту с тех пор произошло уже четыре волны финансовых кризисов, в которых пострадали экономики многих стран вследствие следующей за финансовым коллапсом рецессией и спадом в реальном секторе.

Первая волна кризисов приходится на начало 1980-х, когда Мексика, Бразилия, Аргентина и десятки других развивающихся стран не смогли выполнить свои обязательства по долгам на общую сумму свыше 800 миллиардов долларов. Вторая волна произошла в начале 1990-х и затронула Японию и скандинавские страны - Норвегию, Шведцию и Финляндию. Азиатский финансовый кризис, который произошёл в середине 1997, был третьим, начавшись в Тайланде, Малайзии и Индонезии и нанеся затем значительный ущерб экономикам Северной Кореи, России, Бразилии, Аргентины. Четвёртая волна, точкой отсчёта которой принято считать 2007 год, привела к мировому финансовому кризису.

Каждой волне кризисов предшествовали финансовые пузыри на одном или нескольких рынках. При этом спустя некоторое время после возникновения пузыри обязательно лопались. Это происходило потому, что они были вызваны не обоснованным фундаментальными причинами и, как следствие, нестабильным повышением цен акций или задолженности группы заёмщиков.

Классическая теория эффективных рынков (Fama, 1970) предполагает, что цены на активы отражают всю имеющуюся на рынке информацию. Согласно теории эффективных рынков у инвесторов не существует возможности для арбитража, то есть не существует стратегий, приносящих положительный доход с нулевым риском. При этом утверждается, что эффективность сохраняется в случае, когда, кроме рациональных, на рынке присутствуют и поведенческие (behavioral) агенты, которые поддаются настроениям толпы, оптимизму или пессимизму. Это объясняется (Friedman, 1953 и Fama, 1963) тем, что при движении толпы в сторону продажи актива, который на самом деле недооценён, рациональные агенты будут его скупать, тем самым, возвращая цены к эффективным.

Из теории Fama следует, что на финансовом рынке пузыри существовать не могут. В действительности же они являются довольно распространённым явлением.

Некоторые авторы (Hirshleifer, 2001; Daniel, Hirshleifer, и Teoh, 2002) объясняют подобное несоответствие теории и реальности не учётом рыночных трений или несовершенной рациональностью агентов.

В 1993 Allen, Morris и Postlewaite вывели необходимые условия существования пузырей на финансовых рынках. При этом они показали, что среди условий, приводящих к существованию пузыря, нет рыночных трений или несовершенной рациональности. Авторы обратили внимание на информационные трения. Они доказали, что необходимыми условиями существования на рынке пузырей являются отсутствие общего знания (common knowledge) о торговле игроков и наличие у каждого трейдера индивидуального шумного сигнала о пузыре.

В своей статье 2003 Abreu и Brunnermeier, базируясь на более ранних исследованиях, утверждают, что на финансовых рынках цены не всегда отражают всю имеющуюся на рынке информацию, и пузыри могут существовать, несмотря на присутствие рациональных арбитражёров. Однако, в отличие от модели Allen, Morris и Postlewaite (1993) Abreu и Brunnermeier предполагают, что не все агенты являются рациональными. В статье авторы учли несовершенство информации о фундаментальных показателях. Они показали, что при такой постановке задачи перед рациональными агентами открываются возможности для арбитража.

Отметим, что в отличие от более ранних работ (например, DeLong, Shleifer, Summers, Waldmann, 1990), в которых рациональные агенты подыгрывают хорошим новостям, стимулируя поведенческих (behavioral) агентов активнее покупать актив в следующем периоде (с целью получения бóльшей прибыли), арбитражёры в статье Abreu and Brunnermeier даже не пытаются «подогреть» рынок.

При этом, однако, в своей модели Abreu и Brunnermeier предполагали, что на рынке присутствует континуум мелких арбитражёров. Данное предположение не отражает реальное положение дел на финансовом рынке. Brunnermeier и Morgan (Brunnermeier и Morgan, 2008) заменили предположение о континууме маленьких трейдеров, предположив, что существует конечное число мелких агентов. Новое предположение качественно на результаты не повлияло.

Необходимо отметить, что важную роль на финансовых рынках играют крупные игроки: паевые инвестиционные фонды, хедж-фонды, банки и т.д. Крупные агенты существенно влияют на рынок и их присутствием при моделировании нельзя пренебрегать.

Так, существует ряд теоретических результатов, подчёркивающих значимость крупных игроков на рынке. Например, Xavier Gabaix, Parameswaran Gopikrishnan, Vasiliki Plerou and H. Eugene Stanley (2006) показали, что крупные игроки (институты) своей торговлей создают избыточную волатильность (пики объёмов и доходности при торговле). Причём значительные всплески доходности и объемов наблюдаются даже при отсутствии важных новостей о фундаментальных показателях.

Большинство же моделей финансовых рынков, рассматриваемых в разделе математических финансов, не учитывают возможность присутствия на рынке агентов, чьи действия могут влиять на цену. Такое предположение подходит для маленьких инвесторов, однако, если на рынке присутствует крупный игрок, тогда цена не будет изменяться независимо от выбранной им стратегии.

Одним из первых исследований присутствия на фондовом рынке крупного игрока является статья Jarrow 1992. В статье построена модель, в которой цены изменяются с изменением позиции крупного игрока. Согласно модели «бумажное» и «реальное» богатство крупного игрока различаются. Под «бумажным» понимается стоимость его позиции, оценённой по текущей цене акций. «Реальное» богатство – объём вырученных при ликвидации (продажи акций) средств. У агентов, которые являются ценополучателями (price-taker), данные понятия совпадают. У крупного игрока за счёт значительных объёмов ресурсов, перемещение которых изменяет цену, - нет. Таким образом, существование большого запаса денежных ресурсов позволяет крупному игроку влиять на цены.

Jarrow изучил возможность существования у крупного игрока стратегий поведения на рынке, которые позволяют ему получить положительную прибыль с нулевым риском. Он показал, что при определённых условиях у крупного игрока существует стратегия, при которой возможно получение безрискового дохода. Отметим, что в модели Jarrow крупный игрок не является инсайдером. Автор доказал, что несмотря на это, у крупного игрока существует возможность для арбитража, даже если таковая отсутствует у маленьких игроков в условиях, когда крупный игрок занимает нулевую позицию на рынке.

В статье показано, что при очень общих условиях, если процесс ценообразования зависит от запаса ценных бумаг у крупного игрока на руках, тогда существуют возможности для арбитража. Что противоречит гипотезе эффективных рынков.

К недостаткам модели относится техническое упрощение, которое не позволяет правдоподобным образом описать процесс ценообразования: в модели цены зависят от действий крупного игрока через функцию реакции на запас его активов (holdings) на рынке.

Данный подход к ценообразованию актива был также использован в работе Frey and Stremme (1997), в которой авторы разработали аналог модели Jarrow в непрерывном времени. Kyle (1985) and Back (1992) использовали равновесный подход (equilibrium approach), чтобы получить подобную динамику цены в присутствие инсайдера, построив модель в дискретном и обобщив её для случая непрерывного времени соответственно. Однако, по-прежнему в указанных моделях цены зависели от запаса активов у крупного инвестора через функцию реакции.

Ряд исследователей предложили другие подходы к моделированию ценообразования. Так, Cuoco and Cvitanic (1998) and Cvitanic and Ma (1996) представили процесс ценообразования как геометрическое броуновское движение. В таких моделях диффузии цены не явно зависят от стратегии крупного игрока, а косвенно через коэффициенты дрейфа и волатильности. Тем не менее, влияние позиции крупного игрока на цены определяется в данных работах экзогенно.

В своей работе Peter Bank и Dietmar Baum (2004) развили данное направление, представив процесс ценообразования полумартингалом. По многим свойствам данная модель схожа с результатами, полученными Jarrow. Однако, существует и концептуальное отличие, которое заключается в следующем. Влияние ордера крупного игрока на цену в более ранних работах проявляется мгновенно, а в статье эффект от ордера будет сохраняться до следующего ордера, выставленного крупным агентом. Это приводит к обратной связи между ценой актива и стратегией крупного игрока.

Следует отметить, что кроме собственной выгоды крупный игрок может создавать на финансовом рынке благоприятные условия для инвестиций мелких игроков. Так, Jay Surti (2001) показал, что положение мелких игроков улучшается с появлением на рынке крупного игрока, так как он создаёт дополнительную информацию своими вложениями.

Перечисленные работы, учитывающие присутствие на рынке крупного игрока, следует классифицировать, как результаты теории рыночных манипуляций (theory of market manipulation). Данная теория изучает возможности арбитража, исследуя, однако, только те ситуации, которые возникают в случае, когда трейдеры могут влиять на цены.

В диссертационной работе построена теоретико-игровая модель, основанная на предложенной Abreu и Brunnermeier, в которой в отличие от многих работ арбитражёры не могут влиять на повышение цены. При этом в модель добавлен крупный игрок. Таким образом, построенная модель, с одной стороны, не содержит недостатков теории рыночных манипуляций, с другой, учитывает возможность присутствия на рынке крупного игрока. Показано, что с появлением крупного игрока в модели сохраняется единственность равновесия. При этом, однако, присутствие крупного игрока изменяет характеристики этого равновесия.

1. Описание базовой модели

1.1. Рынки, равновесные цены и пузыри

В классических моделях рыночных активов, таких как CAPM, инвесторы рациональны, а рынки совершенны и конкурентны. Более того, считается, что известны вероятностные распределения всех экзогенных переменных, причём это знание является общим (common knowledge). Также необходимо отметить, что в этих моделях не учитывается избыточная волатильность (трения, связанные с информацией, приводящие к избыточной торговой прибыли), присутствующая на рынке. Чтобы объяснить стратегии, приносящие аномальные (по сравнению с классическими моделями) доходности по мнению некоторых авторов (Hirshleifer, 2001; Daniel, Hirshleifer, and Teoh, 2002) в теории необходимо учесть либо рыночные трения, либо несовершенную рациональность.

Однако, помимо двух указанных причин на цены финансовых активов могут влиять информационные трения и ориентация на толпу (information blockages and herding). Так, например, в модели Abreu and Brunnermeier (2003), нарушается предположение об общности знания (common knowledge) и арбитражёры, которые хотят нажиться на пузыре, не знают, каким знанием обладают другие агенты.

В своей статье Abreu и Brunnermeier утверждают, что на финансовых рынках пузыри могут существовать, несмотря на присутствие рациональных арбитражёров. Авторы анализируют ситуацию, при которой на финансовом рынке кроме рациональных арбитражёров присутствуют поведенческие (behavioral) агенты. Эти игроки поддаются моде, животным инстинктам, эффекту толпы. В статье изучено влияние рациональных арбитражёров на возможность арбитража.

1.2 Модель Abreu и Brunnermeier

Статья Abreu and Brunnermeier посвящена исследованию механизма образования пузырей типа DotCom на финансовых рынках. Исторически пузыри действительно часто случаются в периоды технологических сдвигов. Например, железнодорожный бум, бум электричества, DotCom – бум интернета и телекоммуникаций.

Авторы подчёркивают, что в случае с DotCom многие инвесторы были ошибочно оптимистичны о длительности ускорившихся темпов роста на ценные бумаги, считая, что пришла новая экономика, и эти темпы роста сохранятся надолго. Некоторые, однако, понимали, что это скоро закончится.

Abreu и Brunnermeier предполагают, что рациональные агенты понимают, что когда-то наступит коллапс, но хотят сыграть на пузыре для получения высокой доходности.

В модели предполагается, что в момент времени $t=0$ приходит новая экономика и цена начинает расти с большим темпом ($g>r$), но в некоторый момент времени t_0 темп роста, обеспеченный фундаментальными показателями, возвращается к прошлому значению r, а фактический ещё какое-то время остаётся ускоренным g.

Допускается, что t_0 имеет экспоненциальное распределение на $[0,\infty)$, то есть его функция распределения имеет вид $\Phi(t_0)=1-e^{-\lambda t_0}$.

После момента времени t_0 только доля $1-\beta(\cdot)$ цены обеспечена фундаментальными показателями. $\beta(\cdot)$ отражает компоненту пузыря и составляет некоторую долю от общей цены. $\beta(\cdot):[0,\bar{\tau}]\to[0,\bar{\beta}]$ - строго возрастающая и непрерывная функция $t-t_0$: $\beta(t-t_0)=1-e^{-(g-r)(t-t_0)}$.

Среди рациональных игроков существует дисперсия мнений: арбитражёры последовательно узнают о том, что в момент t_0 цены становятся выше фундаментальной стоимости актива: в каждый момент от t_0 до $t_0+\eta$ только доля $\frac{1}{\eta}$ агентов становится осведомлённой о переоценке. Никто из агентов не знает, сколько агентов получили сигнал до и после него. Авторы интерпретируют η как меру различий во мнениях и прочую неоднородность среди арбитражёров. Чем больше разброс во мнениях (например, о переоценке акций), тем больше η.

После того, как агенты становятся осведомлёнными, они всегда имеют возможность продать, но они предпочитают поиграть на пузыре.

Арбитражёр, получивший информацию в момент t_i, носит название t_i. Апостериорное распределение t_0 с точки зрения арбитражёра t_i - $\Phi(t_0 \mid t_i) = \frac{e^{\lambda\eta} - e^{\lambda(t_i - t_0)}}{e^{\lambda\eta} - 1}$.

Пузырь лопнет, только когда достаточное количество арбитражёров начнёт продавать и денежных ресурсов поведенческих агентов, которые считают, что пришла новая экономика и всегда покупают актив, не хватит, чтобы покрыть предложение со стороны рациональных игроков.

Существенное изменение цены может произойти только если общее давление продаж превысит некоторую пороговую черту k. Экономическая сущность параметра k - запас денежных средств у поведенческих игроков. Таким образом, перманентный сдвиг в уровне цены требует скоординированной атаки арбитражёров.

Как только суммарное давление агентов на цену превысит k, то цена упадёт на долю $\beta(\cdot)$. Однако, даже если суммарное давление агентов на цену никогда не превысит k, предполагается, что пузырь лопнет от экзогенных причин, как только достигнет своего максимального размера $\bar{\beta}$, что в переводе на время означает, что пузырь лопнет в момент $t_0 + \bar{\tau}$.

Самый выигрышный вариант для арбитражёров выйти с рынка (продать имеющиеся у них активы) за секунду до краха. При этом рациональные агенты понимают, что каждый из них будет по-разному подходить к проблеме тайминга (когда продавать). Такая дисперсия стратегий выхода с рынка и недостаток синхронизации позволяют пузырю расти.

Таким образом, модель содержит две компоненты. Первая – координация: для того, чтобы пузырь лопнул, требуется, чтобы, по крайней мере, доля k арбитражёров продали свои активы. Вторая – соревнование: до финансового краха рынок сможет покинуть только доля k арбитражёров.

В рассмотренной модели рациональные агенты остаются на рынке пока субъективная вероятность того, что пузырь лопнет в следующем торговом раунде, не станет достаточно высокой. Игроки, которые покинут рынок за секунду до краха, выйдут с наибольшей прибылью, те, кто продаст активы достаточно рано, получат небольшую прибыль, а держащие акции очень долго потеряют всю прибыль.

В момент $t_0+\overline{\tau}$ пузырь лопнет от экзогенных причин, даже если ранее давления на цену со стороны арбитражёров не хватило для создания финансового краха.

В равновесии каждый арбитражёр продаёт спустя некоторое время после того, как становится осведомлённым о переоценке актива. Если мнения агентов достаточно разбросаны, существует равновесие, в котором пузырь лопнет только в $t_0+\overline{\tau}$, то есть от экзогенных причин.

Для более умеренного уровня в дисперсии мнений, что эквивалентно меньшему η, характерна эндогенная причина коллапса. Тем не менее, пузырь растёт довольно долгое время. Более того, равновесие единственное.

Модель, представленная в данной статье, показывает естественную ситуацию, в которой новости имеют непропорциональное влияние относительно их внутреннего содержания. Это происходит потому, что новости позволяют агентам синхронизировать свои стратегии выхода (перереакция). Объясняет ориентацию на уровни сопротивления/поддержки, фигуры разворота/продолжения тренда.

Ниже представлена формализация модели.

Каждый арбитражёр может продать все или часть своих акций или даже занять короткую позицию, пока не достигнет своего финансового лимита. Авторы вводят нормировку, согласно которой все позиции каждого арбитражёра лежат в интервале $[0,1]$, где 0 – наиболее длинная позиция, а 1 – наиболее короткая.

$\sigma(t,t_i)$ - давление на цену со стороны игрока типа t_i ($[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,1]$).

Суммарное давление на цену всех арбитражёров в момент времени

$$t \geq t_0 \ \text{-} \ s(t,t_0) = \int_{t_0}^{\min(t,t_0+\eta)} \sigma(t,t_i)dt_i \qquad (1)$$

Обозначим момент, когда пузырь лопнет как

$$T^*(t_0) = \inf\left[t \mid s(t,t_0) \geq k \ or \ t = t_0 + \overline{\tau}\right] \qquad (2)$$

Заметим, что он зависит от момента переоценки.

Никто из арбитражёров не знает момент, когда лопнет пузырь, однако, все знают его вероятностные характеристики, поэтому каждый агент оценивает вероятность финансового коллапса в каждый момент времени.

$\Pi(t \mid t_i) = \Pr(T^*(t_0) < t \mid t_i)$ - апостериорная вероятность того, что пузырь лопнет до момента t по мнению арбитражёра t_i.

Доход каждого арбитражёра зависит от цены, по которой он продаёт/покупает минус транзакционные издержки исполнения ордера.

Цена исполнения ордера может быть докризисной - $p(t)$ или послекризисной $(1-\beta(t-t_0))p(t)$. За секунду до краха, то есть пока давление меньше или равно k, цена $p(t)$. Если в момент, когда давление на цену превышает критическое значение, подано слишком много заявок, то случайным образом некоторые удовлетворяются по $p(t)$, а остальные по $(1-\beta(t-t_0))p(t)$.

Таким образом, ожидаемая цена исполнения $(1-\alpha)p(t)+\alpha(1-\beta(t-t_0))p(t)$, где α - давление на цену, причём $\alpha>1$, если давление переходит критическое значение и $\alpha=0$ в противном случае.

Предполагается, что арбитражёры несут транзакционные издержки всякий раз, когда меняют свою позицию. Отсюда следует, что агенты будут менять свою позицию, по крайней мере, конечное число раз. В целом, введение транзакционных издержек позволяет авторам в дальнейшем доказать, оптимальность триггерных стратегий.

Авторы допускают, что текущая стоимость (то есть стоимость с учётом дисконтирования) транзакционных издержек константа, то есть транзакционные издержки в момент времени t равны ce^{rt}. Это гарантирует, что в равновесии поведение агентов не зависит от транзакционных издержек.

Функция ожидаемого выигрыша для случая триггерных стратегий, если продавать в момент t (с учётом дисконтирования) для арбитражёра t_i равна

$$\int_{t_i}^{t} e^{-rs}(1-\beta(s-T^{*-1}(s)))p(s)d\Pi(s\,|\,t_i)+e^{-rt}p(t)(1-\Pi(t\,|\,t_i))-c \qquad (3)$$

Где

e^{-rt} - дисконтирующий фактор

$p(t)=e^{gt}$ - цена в новой экономике

$(1-\beta(s-T^{*-1}(s)))p(s)$ - фактическая цена после того, как пузырь лопнул

$\int_{t_i}^{t}(1-\beta(s-T^{*-1}(s)))p(s)d\Pi(s\,|\,t_i)$ - сумма лопнувшей цены на вероятность того, что пузырь лопнул в момент s.

$p(t)(1-\Pi(t\,|\,t_i))$ - цена с пузырём на вероятность того, что до момента t пузырь ещё не лопнул.

В статье показано, что анализ можно ограничить рассмотрением триггерных стратегий (торговая стратегия, при которой, если агент начал продавать актив в момент времени t продолжает атаковать пузырь до момента дефолта).

Торговым равновесием авторы называют совершенное байесовское равновесие по Нэшу, в котором если когда-либо запасы акций арбитражёра меньше его максимума, то арбитражёр (верно) ожидает, что количество акций на руках у агентов, которые стали осведомлены раньше него, также меньше его максимального запаса.

Ниже приведены леммы и утверждения, которые авторы формулируют и доказывают в своей работе.

Лемма 1. В равновесие не наблюдается частичных продаж или покупок: $\sigma(t,t_i)\in\{0,1\}\ \forall t,t_i$

Таким образом, общее давление на цену при продаже равняется количеству трейдеров, которые выходят с рынка.

Доказательство приведено в статье.

Заключение 1. (Cut-off property) когда арбитражёр t_i продаёт свои активы, то все трейдеры $t_j\le t_i$ уже продали и сейчас продают свои акции:

$$\sigma(t,t_i)=1\rightarrow\sigma(t,t_j)=1\ \ \forall t_j\le t_i \text{ и } \sigma(t,t_i)=0\rightarrow\sigma(t,t_j)=0\ \ \forall t_j\ge t_i$$

Определим функцию $T(t_i) = \inf\{t \mid \sigma(t,t_i) > 0\}$ как первый момент, когда арбитражёр t_i начинает продавать, то есть $T(t_i)$ - момент коллапса по мнению t_i.

Тогда $T^*(t_0) = \inf\left[t \mid s(t,t_0) \geq k \ or \ t = t_0 + \overline{\tau}\right] = \min\{T(t_0 + \eta k), t_0 + \overline{\tau}\}$, так как все агенты меньше $t_0 + \eta k$ уже продали свои акции, то есть давление агента $t_0 + \eta k$ на цену приведёт к переходу за пороговый уровень.

В момент $T(t_i)$ арбитражёр t_i строит апостериорные ожидания о моменте начала переоценки актива t_0. Обозначим нижнюю границу этих ожиданий $\underline{t}_0(t_i)$, то есть это самый ранний момент, когда могла произойти переоценка по мнению t_i.

Лемма 2. В равновесии агент t_i в момент времени $T(t_i)$ ожидает, что максимум доля k арбитражёров узнала о переоценки до него: $\underline{t}_0(t_i) + \eta k \geq t_i$.

В статье также доказано, что $T^*(\cdot)$ монотонно возрастающая и непрерывная, а значит, обратима, то есть существует функция (взаимно однозначное соответствие) $T^{*-1}(\cdot)$. Кроме того, показано, что $T(\cdot)$ также непрерывна.

Обозначим $B^c(t)$ событие «пузырь не лопнул до момента t»

Лемма 6. для всех $t_i > 0$ арбитражёр t_i ожидает, что в момент $T(t_i)$ пузырь лопнет с нулевой вероятностью, то есть $\Pr ob\{T^{*-1}(T(t_i)) \mid t_i, B^c(T(t_i))\} = 0$ для всех $t_i > 0$

Замечу, что $T^*(t_0) = t^{crash}$, $t_0 = T^{*-1}(t^{crash})$. Тогда $T^{*-1}(T(t_i)) \mid t_i$ - момент переоценки (t_0) по мнению агента t_i.

Предложение 1. В равновесии арбитражёр t_i сохраняет максимально короткую позицию для всех $t \geq T(t_i)$ до момента дефолта, то есть агент продаёт имеющиеся акции в момент $T(t_i)$ и более не входит на рынок.

Авторы рассматривают только случаи, в которых функция $T^{*-1}(\cdot)$ в равновесии абсолютно непрерывна. Тогда $\Pi(t)=\Phi(T^{*-1}(t))$ также абсолютно непрерывна. Технически абсолютная непрерывность требуется для дифференцирования интеграла по верхнему пределу. Обозначим $\pi(t)$ - соответствующую функцию плотности.

Воспользовавшись тем фактом, что равновесные стратегии триггерные, получаем платёжную функцию в виде (3).

Для максимизации получаемой выгоды (выигрыша), необходимо получить условие первого порядка, то есть продифференцировать платёжную функцию (4) по t и приравнять к нулю.

$$Payoff(t)=\int_{t_i}^{t} e^{-rs}(1-\beta(s-T^{*-1}(s)))p(s)d\Pi(s\,|\,t_i)+e^{-rt}p(t)(1-\Pi(t\,|\,t_i))-c \tag{4}$$

$$\frac{dPayoff(t)}{dt}=0$$

Произведя несколько алгебраических операций и учитывая $p(t)=e^{gt}$, получаем

$(g-r)(1-\Pi(t\,|\,t_i))-\beta(t-T^{*-1}(t))\pi(t\,|\,t_i)=0$, откуда

$$\frac{\pi(t\,|\,t_i)}{1-\Pi(t\,|\,t_i)}=\frac{g-r}{\beta(t-T^{*-1}(t))}$$

Переобозначая,

$h(t\,|\,t_i) = \dfrac{\pi(t\,|\,t_i)}{1-\Pi(t\,|\,t_i)}$ - уровень риска (hazard rate) - условная вероятность дефолта при условии, что ранее дефолта не было.

Лемма 7. Если субъективный уровень риска (hazard rate) агента t_i меньше, чем отношение «выгоды-издержки», то есть $h(t\,|\,t_i) < \dfrac{g-r}{\beta(t-T^{*-1}(t))}$, то трейдер t_i будет выбирать держать наиболее длинную позицию.

Напротив, если $h(t\,|\,t_i) > \dfrac{g-r}{\beta(t-T^{*-1}(t))}$, то он будет выбирать максимально короткую позицию.

Интуитивное объяснение заключается в следующем.

Размер пузыря в момент краха - $\beta(t-T^{*-1}(t))p(t)$. Рассмотрим выгоды и издержки атаки в момент t супротив атаки в момент $t+\Delta$.

Выгоды атаки в момент t (что агент потеряет, ожидая момент $t+\Delta$) - вероятность дефолта за этот промежуток времени, умноженная на размер пузыря): $\Delta h(t\,|\,t_i)\beta(t-T^{*-1}(t))p(t)$. Издержки от ухода с рынка в момент t (что агент потеряет при условии, что дефолт не случится за период Δ) - вероятность, что дефолт не случился за этот период на выигрыш в темпе прироста цены): $(1-\Delta h(t\,|\,t_i))\left\{\dfrac{p(t+\Delta)-p(t)}{\Delta} - rp(t)\right\}\Delta$.

Равенство издержек и выгод от атаки в момент t:

$$\Delta h(t\,|\,t_i)\beta(t-T^{*-1}(t))p(t) = (1-\Delta h(t\,|\,t_i))\left\{\frac{p(t+\Delta)-p(t)}{\Delta} - rp(t)\right\}\Delta$$

Разделим на $\Delta p(t)$ и устремим $\Delta \to 0$, получим

$$h(t\,|\,t_i)\beta(t-T^{*-1}(t))=\left\{\frac{p'(t)}{p(t)}-r\right\}\text{ , так как }\frac{p'(t)}{p(t)}=g$$

$$h(t\,|\,t_i)=\frac{g-r}{\beta(t-T^{*-1}(t))}.$$

Рассмотрим, почему возникает устойчивость пузыря, то есть почему финансовый пузырь существует продолжительное время.

В стандартных моделях ценообразования активов пузырь не может быть персистентным. Логика следующая (рассмотрим в терминах описанной модели).

Даже если ни один из агентов не будет продавать свои акции, создавая давление на цену, пузырь всё равно лопнет от экзогенных причин в момент $t_0+\overline{\tau}$. Так как каждый арбитражёр становится осведомлён о переоценке актива после момента t_0, то он точно может быть уверен, что в момент $t_i+\overline{\tau}$ пузыря уже не будет, так как $t_0+\overline{\tau}\in[t_i+\overline{\tau}-\eta,t_i+\overline{\tau}]$. Таким образом, арбитражёру t_i оптимально выйти с рынка до $t_i+\overline{\tau}$, более точно в момент $t_i+\tau_1$ (пусть это лучший момент для выхода арбитражёра t_i, если он предполагает, что другие арбитражёры никогда не будут атаковать и соответственно пузырь лопнет только в момент $t_0+\overline{\tau}$). Однако, предположение, что все арбитражёры играют на пузыре τ_1 периодов приводит к новой дате дефолта и новому наиболее оптимальному отклику со стороны арбитражёра t_i - $t_i+\tau_2$. Продолжая данные рассуждения индуктивно получаем τ_3,τ_4 и т.д. В стандартной модели это приводит к $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=0$, что мешает появлению пузыря.

Однако, в данной модели получено, что данная процедура не реализуется.

Последовательная информированность притупляет соревновательность среди агентов, на которой базируется теория эффективных рынков, и приводит к достаточной неопределённости среди арбитражёров относительно оптимальной (наиболее прибыльной) стратегии. Хотя для самих арбитражёров отсутствие синхронизации скорее благо, нежели проблема.

Рассмотрим ситуацию, когда крах носит экзогенный характер.

Определим $\tau(t_i) = T(t_i) - t_i$ как промежуток времени, в течение которого арбитражёр выбирает играть на пузыре (от момента осведомления до момента начала продажи имеющихся у агента активов)

Предложение 2. Если $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}} \le \frac{g-r}{\bar{\beta}}$, то существует единственное торговое равновесие. В этом равновесии все трейдеры продают имеющиеся у них активы через $\tau_1 = \bar{\tau} - \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{g-r}{g-r-\lambda\bar{\beta}}\right) < \bar{\tau}$ периодов после того, как становятся осведомлены о пузыре, и не входят на рынок вновь. При этом для всех t_0 пузырь лопается от экзогенных причин, когда достигает своего максимального размера $\bar{\beta}$.

Доказательство.

1) Докажем, что τ_1 определяет симметричное равновесие.

Предположим, что арбитражёр t_i ожидает, что пузырь лопнет в момент $t_0 + \zeta$.

$\Phi(t_0 \mid t_i) = \frac{e^{\lambda\eta} - e^{\lambda(t_i - t_0)}}{e^{\lambda\eta} - 1}$, $\Pi(t \mid t_i) = \Pr(T^*(t_0) < t \mid t_i) = \int\limits_{T^*(t_0)<t} d\Phi(t_0 \mid t_i)$ (то есть $\Phi(t_0 \mid t_i)$ по всем моментам времени после краха до момента t)

Апостериорное распределение $T^*(t_0)$ (момента дефолта) с точки зрения арбитражёра t_i - $\Pi(t_i+\tau\,|\,t_i)=\frac{e^{\lambda\eta}-e^{\lambda(\zeta-\tau)}}{e^{\lambda\eta}-1}$.

Рассчитаем уровень риска (hazard rate), который присутствует в условии первого порядка для максимизации платёжной функции:

$h(t_i+\tau\,|\,t_i)=\frac{\pi(t_i+\tau\,|\,t_i)}{1-\Pi(t_i+\tau\,|\,t_i)}$, $\pi(t\,|\,t_i)=\frac{d\Pi(t\,|\,t_i)}{dt}$, так как $\Pi(t_i+\tau\,|\,t_i)=\frac{e^{\lambda\eta}-e^{\lambda(\zeta+t_i-(\tau+t_i))}}{e^{\lambda\eta}-1}$, то

$\pi(t_i+\tau\,|\,t_i)=\frac{\lambda}{e^{\lambda\eta}-1}e^{\lambda(\zeta-\tau)}$, тогда

$$h(t_i+\tau\,|\,t_i)=\frac{\frac{\lambda}{e^{\lambda\eta}-1}}{1-\frac{e^{\lambda\eta}-e^{\lambda(\zeta-\tau))}}{e^{\lambda\eta}-1}}=\frac{\lambda e^{\lambda(\zeta-\tau)}}{e^{\lambda\eta}-1-e^{\lambda\eta}+e^{\lambda(\zeta-\tau)}}=\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(\zeta-\tau)}}$$

Предположим, что пузырь лопнет от экзогенных причин, тогда $\zeta=\bar{\tau}$ и уровень риска соответственно $h=\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(\bar{\tau}-\tau)}}$, то есть возрастающая функция τ (см. рисунок). Чтобы понять, как будут себя вести агенты необходимо сравнить уровень риска со значением соотношения «издержки-выгоды». Так как экзогенный крах не зависит от τ, а случается точно в момент $t_0+\bar{\tau}$, то соотношение «издержки-выгоды» постоянно и равно $\frac{g-r}{\beta}$ (предположение о том, что дефолт произойдёт от экзогенных причин приводит к тому, что соотношение «издержки-выгоды» не меняется во времени).

Итак, равенство уровня риска соотношению «издержки-выгоды» - τ_1:

$$h(t_i+\tau_1 \mid t_i)=\tfrac{g-r}{\bar\beta}, \qquad \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(\bar\tau-\tau_1)}}=\tfrac{g-r}{\bar\beta}, \qquad 1-e^{-\lambda(\bar\tau-\tau_1)}=\tfrac{\lambda\bar\beta}{g-r}, \qquad 1-\tfrac{\lambda\bar\beta}{g-r}=e^{-\lambda(\bar\tau-\tau_1)},$$

$$\tau_1=\bar\tau+\frac{1}{\lambda}\ln\left(1-\tfrac{\lambda\bar\beta}{g-r}\right),$$

$$\tau_1=\bar\tau-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\tfrac{g-r}{g-r-\lambda\bar\beta}\right)$$

Таким образом, для арбитражёра t_i оптимальным является выход с рынка в момент τ_1, до этого момента ему следует держать активы, а после не входить на рынок.

Так как дефолт произойдёт от экзогенных причин (в силу предположения), значит $t_0+\bar\tau<t_0+\tau_1+\eta k$. Однако, симметричный триггерный момент продажи через τ_1 периодов после осведомления определяет равновесие, результатом которого является экзогенный крах.

2) Докажем единственность методом от противного. Предположим, что существует ещё одно равновесие.

Рассмотрим $\underline{t}_i=\arg\min_{t_i}\left[\tau(t_i)\right]$ (то есть арбитражёра t_i, у которого промежуток времени от момента осведомления до момента начала продажи имеющихся у него активов $\tau(t_i)=T(t_i)-t_i$ минимальный).

Для всех агентов $\tau(t_i)\le\tau_1$ для всех t_i (при $>$ не может быть, так как при этом невыгодное соотношение между уровнем риска и значением соотношения «издержки-выгоды»). Случай «$=$» исключает возможность существования ещё одного (отличного от найденного в предыдущем пункте) равновесия. Значит, должно быть $\tau(\underline{t}_i)<\tau_1$.

Рассмотрим $\underline{t}_0(\underline{t}_i)$ (то есть нижняя граница оценки момента переоценки актива глазами самого «торопливого» агента).

Согласно утверждению леммы 2 в равновесии агент t_i в момент времени $T(t_i)$ ожидает, что максимум доля k арбитражёров узнала о переоценке до него: $\underline{t}_0(t_i)+\eta k \ge t_i$, значит $\underline{t}_0(\underline{t}_j)+\eta k \ge t_j$. Значит, возможны 2 случая: $\underline{t}_0(\underline{t}_j)+\eta k > t_j$ или $\underline{t}_0(\underline{t}_j)+\eta k = t_j$.

(а) Если $\underline{t}_0(\underline{t}_j)+\eta k > t_j$ (то есть агент $\underline{t}_j$ получил сигнал о переоценке раньше, чем доля k агентов), то причина, по которой этот агент может продавать активы в момент $t_j+\tau(\underline{t}_j)$, - экзогенный крах. Однако, согласно пункту 1) доказательства, если агенты опасаются экзогенного дефолта, то они будут продавать в момент $\tau(\underline{t}_j)=\tau_1$. Но это противоречит ранее сделанному предположению (для существования ещё одного равновесия): $\tau(\underline{t}_j)<\tau_1$.

(б) Если $\underline{t}_0(\underline{t}_j)+\eta k = t_j$ (то есть агент $\underline{t}_j$ получил сигнал о переоценке, когда доля k агентов его уже получила). В этом случае уровень риска ($h=\dfrac{\lambda}{1-e^{-\lambda(\zeta-\tau)}}$), с которой лопает пузырь, в момент, когда $\underline{t}_j$ начинает продавать равна максимум $\dfrac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}$.

Дело в том, что самый ранний крах – эндогенный, произойдёт в момент $t_0+\eta k+\tau(t_0+\eta k)$, значит, $\zeta=\eta k+\tau(t_0+\eta k)$.

в силу $\underline{t}_j=\arg\min\limits_{t_i}\left[\tau(t_i)\right]$, то $\tau(t_0+\eta k)\ge\tau(t_j)$, значит, $\zeta-\tau(t_j)=\eta k+\tau(t_0+\eta k)-\tau(t_j)\ge\eta k$,

откуда $e^{\lambda(\zeta-\tau(t_j))}\ge e^{\lambda\eta k}$ (в силу монотонного возрастания экспоненты), $e^{-\lambda(\zeta-\tau(t_j))}\le e^{-\lambda\eta k}$

$$1-e^{-\lambda(\zeta-\tau(t_j))}\ge 1-e^{-\lambda\eta k},\ \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(\zeta-\tau(t_j))}}\le\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}.$$

Сравним $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}$ и $\frac{g-r}{\bar{\beta}}$.

Так как по предположению крах происходит от экзогенных причин, значит, до момента $t_0+\bar{\tau}$ давление на цену не превысит порогового значения, то есть продаст свои активы меньше доли k агентов или $\bar{\tau} \le \eta k + \tau_1$.

Так как $\bar{\tau} \le \eta k + \tau_1$ или $\bar{\tau} - \tau_1 \le k$. Кроме того, $\bar{\tau} - \tau_1 = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{g-r}{g-r-\lambda\bar{\beta}}\right)$, то

$\ln\left(\frac{g-r}{g-r-\lambda\bar{\beta}}\right) \le \lambda\eta k$, откуда $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}} \le \frac{g-r}{\bar{\beta}}$

Таким образом, $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}} \le \frac{g-r}{\bar{\beta}}$, поэтому арбитражёру $\underline{t_j}$ не будет продавать, что противоречит $\tau(\underline{t_j}) < \tau_1$ (то есть арбитражёру $\underline{t_j}$ выгодно продавать раньше, чем τ_1).

Таким образом, второго отличного равновесия не существует.

Теорема доказана.

В рассмотренном случае каждому арбитражёру оптимально играть на пузыре достаточно долго, поэтому к концу горизонта менее, чем доля k арбитражёров, продадут имеющиеся у них активы. В данном случае пузырь лопнет от экзогенных причин.

Таким образом, арбитражёры никогда не лопнут пузырь, если дисперсия во мнениях η и объём денежных средств поведенческих (behavioral) агентов (k) достаточно велики. В этом случае итеративная процедура, упомянутая ранее, не реализуется.

Однако, при определённых соотношениях параметров, реализуется эндогенный крах.

Отметим, что итеративная процедура имеет некоторый вес в случае эндогенного краха.

Если значения параметров η и k малы, то пузырь лопнет от эндогенных причин в момент $t_0 + \eta k + \tau_1 < t_0 + \bar{\tau}$. В данном случае, зная, что самый поздний момент, когда пузырь может лопнуть, $t_0+\eta k+\tau_1$ арбитражёры будут стараться продать раньше, через $\tau_2<\tau_1$ периодов после осведомления. Продолжая рассуждения, получим убывающую последовательность, которая сходится к некоторому τ^*, которое определяет единственное совершенное байесовское равновесие по Нэшу с симметричными триггерными стратегиями. Таким образом, в данном случае итеративная процедура не исключает существования пузыря.

Хотя пузырь лопнет в рассматриваемом случае от эндогенных причин, он может сохраняться существенный период.

Предложение 3. Предположим, что $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}>\frac{g-r}{\bar{\beta}}$ (то есть дефолт эндогенный). Тогда существует единственное торговое равновесие, в котором арбитражёр t_i с $t_i\geq\eta k$ покидает рынок через $\tau^*=\beta^{-1}\left(\frac{g-r}{\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}}\right)-\eta k$ периодов после осведомления.

Все арбитражёры $t_i<\eta k$ продают в момент $\eta k+\tau^*$.

При этом пузырь лопается, когда его доля достигает $\beta^*=\frac{1-e^{-\lambda\eta k}}{\lambda}(g-r)$ от цены до дефолта.

Доказательство.

1) Покажем, что τ^* определяет симметричное равновесие. Предположим, что все арбитражёры с $t_i\geq\eta k$ продают свои акции в момент $t_i+\tau$, а арбитражёры $t_i<\eta k$ в $\eta k+\tau$ для некоторого $\tau\in(0,\bar{\tau}-\eta k)$. Тогда пузырь лопается от в момент $t_0+\zeta$ от эндогенных причин, где $\zeta=\eta k+\tau$. Подставляя это значение в уровень риска, получаем $h=\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(\zeta-\tau)}}=\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}$. Заметим, что уровень риска не зависит от τ в данном случае. Соотношение «издержки-выгоды» в момент продажи

$\frac{g-r}{\beta(\eta k+\tau)}$ - убывающая функция τ, так как по предположению $\beta(\eta k+\tau)$ - возрастающая функция.

В равновесии уровень риска равен соотношению «издержки-выгоды», то есть $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}=\frac{g-r}{\beta(\eta k+\tau^*)}$, откуда $\tau^*=\beta^{-1}\left(\frac{g-r}{\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}}\right)-\eta k$.

Если предположить, что $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}<\frac{g-r}{\beta(\eta k)}$, тогда арбитражёры не будут продавать имеющиеся акции до того, как станут осведомлёнными, то есть $\tau^*>0$. Условие $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}>\frac{g-r}{\bar{\beta}}$ подразумевает, что $\tau^*<\bar{\tau}-\eta k$. Действительно, $\bar{\beta}=\beta(\bar{\tau})>\frac{g-r}{\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}}$, $\bar{\tau}>\beta^{-1}\left(\frac{g-r}{\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}}\right)$, но

$\tau^*+\eta k=\beta^{-1}\left(\frac{g-r}{\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}}\right)$, значит, $\bar{\tau}>\tau^*+\eta k$.

2) Докажем единственность (за несколько шагов).

Докажем, что пузырь всегда лопается от эндогенных причин, когда $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}>\frac{g-r}{\bar{\beta}}$. Воспользуемся методом от противного.

Пусть существует такое τ_1, что $h(t_i+\tau_1\,|\,t_i)=\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(\bar{\tau}-\tau_1)}}=\frac{g-r}{\bar{\beta}}$.

Каждый трейдер будет покидать рынок в момент $t_i+\tau_1$, если ожидает, что пузырь лопнет от экзогенных причин, достигнув максимального размера $\bar{\beta}$.

Исходя из нашего предположения $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}>\frac{g-r}{\bar{\beta}}=\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(\bar{\tau}-\tau_1)}}$, $e^{-\lambda\eta k}>e^{-\lambda(\bar{\tau}-\tau_1)}$, $\eta k<\bar{\tau}-\tau_1$, то есть $t_0+\tau_1+\eta k<t_0+\bar{\tau}$. Отсюда получаем, что

пузырь может лопнуть от экзогенных причин только если $\tau(t_i) > \tau_1$ по крайней мере для некоторых t_i.

Рассмотрим арбитражёра t_j: $t_j = \arg\max_{t_i} [\tau(t_i)]$ (самый «нетороплиывый, жадный» арбитражёр, он медлит несмотря на то, что при экзогенном крахе надо выходить в момент $t_i + \tau_1$)

Согласно утверждению леммы 2 в равновесии агент t_i в момент времени $T(t_i)$ ожидает, что максимум доля k арбитражёров узнала о переоценке до него: $\underline{t}_0(t_i) + \eta k \geq t_i$. Значит, возможны 2 случая: $\underline{t}_0(t_j) + \eta k > t_j$ или $\underline{t}_0(t_j) + \eta k = t_j$.

(a) если $\underline{t}_0(t_j) + \eta k > t_j$ (то есть агент узнал о переоценке актива раньше, чем доля k агентов), тогда уровень риска арбитражёра t_j в момент, когда он начинает продавать ($\tau(t_j) > \tau_1$, поэтому $T(t_j) = t_j + \tau(t_j) > t_j + \tau_1$, так как он медлящий, «жадный») строго превышает $\frac{g-r}{\bar{\beta}}$.

Действительно, так как агент считает, что может случиться только экзогенный крах, то его уровень риска - $h(t_j + \tau(t_j) \mid t_j) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda(\bar{\tau} - \tau(t_j))}}$. Так как $\tau(t_j) > \tau_1$, следовательно, $e^{-\lambda(\bar{\tau} - \tau(t_j))} > e^{-\lambda(\bar{\tau} - \tau_1)}$, $1 - e^{-\lambda(\bar{\tau} - \tau(t_j))} < 1 - e^{-\lambda(\bar{\tau} - \tau_1)}$, $\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda(\bar{\tau} - \tau(t_j))}} > \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda(\bar{\tau} - \tau_1)}}$, но по определению τ_1 $\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda(\bar{\tau} - \tau_1)}} = \frac{g-r}{\bar{\beta}}$, значит $\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda(\bar{\tau} - \tau(t_j))}} > \frac{g-r}{\bar{\beta}}$.

Такое превышение имеет место и для момента $T(t_j)-\varepsilon$ для достаточно малых ε, поэтому целью агента будет более ранняя продажа и т.д., что нарушает условие $\tau(t_j)>\tau_1$.

(б) если $t_0(t_j)+\eta k=t_j$ (то есть агент t_j получил сигнал о переоценке, когда доля k агентов его уже получила). Так как $\tau(t_j)\ge\tau(t_i)$ для любого t_i (по определению), то hazard rate, с которой пузырь может лопнуть в момент $T(t_j)$, не меньше $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}$ ($h(T(t_j)\,|\,t_j)\ge\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}$)

Дело в том, что в силу $t_j=\arg\max\limits_{t_i}\left[\tau(t_i)\right]$, то $\tau(t_0+\eta k)\le\tau(t_j)$, значит,

$\zeta-\tau(t_j)=\eta k+\tau(t_0+\eta k)-\tau(t_j)\le\eta k$,

откуда $e^{\lambda(\zeta-\tau(t_j))}\le e^{\lambda\eta k}$ (в силу монотонного возрастания), $e^{-\lambda(\zeta-\tau(t_j))}\ge e^{-\lambda\eta k}$

$$1-e^{-\lambda(\zeta-\tau(t_j))}\le 1-e^{-\lambda\eta k},\quad \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(\zeta-\tau(t_j))}}\ge\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}.$$

В равновесии уровень риска равен соотношению «издержки-выгоды», то есть $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\eta k}}=\frac{g-r}{\beta(\eta k+\tau^*)}$. Другими словами, в момент $T(t_j)$ условная вероятность дефолта (hazard rate) с точки зрения агента t_j превышает соотношению «издержки-выгоды», то есть слишком долго держит свои активы арбитражёр t_j. Он, исходя из условия оптимальности, начнёт их продавать раньше.

Таким образом, предположение об экзогенном крахе неверно, значит, $T(t_0+\eta k)<t_0+\overline{\tau}$ для $\forall t_0\ge 0$

3) Докажем, что минимум и максимум $\tau(t_i)$ совпадают для $t_i\ge\eta k$.

Согласно утверждению леммы 2 в равновесии агент t_i в момент времени $T(t_i)$ ожидает, что максимум доля k арбитражёров узнала о переоценке до него: $\underline{t}_0(t_i)+\eta k \geq t_i$. Более того, случай $\underline{t}_0(t_i)+\eta k > t_i$ может быть исключён из рассмотрения, так как для арбитражёра t_i будет строго лучше продавать спустя некоторый период времени $\varepsilon > 0$ после его равновесной даты продажи $T(t_i)$, воспользовавшись непрерывностью функции $T(\cdot)$. Дело в том, что в данном случае агент узнаёт о переоценке актива до того, как о ней узнаёт пороговая доля агентов и постфактум ему выгоднее продавать попозже, чем в момент, указанный равновесием.

Тогда для $\underline{t}_0(t_i)+\eta k = t_i$. Легко показать, что условная плотность распределения (для арбитражёра t_i) t_0 в момент $T(t_i)$ определяется из выражения

$\phi(t_i - \eta k \mid t_i, B^c(T(t_i))) = \dfrac{\lambda e^{\lambda \eta k}}{e^{\lambda \eta k} - 1}$ - не зависит от t_i.

Введём обозначения $\underline{t}_i \in \arg\min\limits_{t_i}\left[\tau(t_i)\right]$ (самый осторожный, «нетерпеливый» арбитражёр) и $\overline{t}_i \in \arg\max\limits_{t_i}\left[\tau(t_i)\right]$ (самый «жадный» долго играющий на пузыре арбитражёр) и предположим, что максимум и минимум не совпадают: $\max\left[\tau(t_i)\right] > \min\left[\tau(t_i)\right]$. Тогда из непрерывности $T(\cdot)$ и введённых выше определений следует, что

$\Pi(T(\underline{t}_i)+\Delta \mid \underline{t}_i, B^c(T(\underline{t}_i))) < \Pi(T(\overline{t}_i)+\Delta \mid \overline{t}_i, B^c(T(\overline{t}_i)))$ для всех $\Delta > 0$ и обратный для $\Delta < 0$, так как

$\Pi(t \mid t_i) = \Pr(T^*(t_0) < t \mid t_i, B^c(T(t_i)))$ - *апостериорная* вероятность того, что пузырь лопнет до момента t по мнению арбитражёра t_i при условии, что до момента $T(t_i)$ он не лопнул.

Соответственно, $h(T(\underline{t}_i) \mid \underline{t}_i, B^c(T(\underline{t}_i))) < h(T(\overline{t}_i) \mid \overline{t}_i, B^c(T(\overline{t}_i)))$

Однако, $\beta(\eta k+\tau(\underline{t_i}))\le\beta(\eta k+\tau(\overline{t_i}))$ в силу возрастания функции $\beta(\cdot)$. В таком случае отношение «издержки-выгоды» имеет противоположный знак для этих двух моментов (в равновесии должно быть равенство hazard rate и отношение «издержки-выгоды»).

Таким образом, условие продажи не может быть выполнено одновременно для арбитражёров $\underline{t_i},\overline{t_i}$, противоречие, значит, наше предположение ($\max\left[\tau(t_i)\right]>\min\left[\tau(t_i)\right]$) неверно.

4) Для $t_i<\eta k$ (узнал точно раньше, чем пороговое число арбитражёров, так как $t_0\ge 0$) $T(t_i)=T(\eta k)$.

Действительно, продавать до $T(\eta k)$ не имеет смысла, так как даже если $t_0=0$, то только в $T(\eta k)$ (самое ранее) случится эндогенный крах. При этом в рассмотренном случае арбитражёры ηk будут продавать в $T(\eta k)$, то есть $\sigma(T(\eta k),t_i)=1$, но тогда $\sigma(T(\eta k),t_j)=1\forall t_j\le t_i$, а $t_i<\eta k$, значит, в момент $T(\eta k)$ арбириражёт t_i тоже продаёт.

Следовательно, $T(t_i)=T(\eta k)$.

Что требовалось доказать.

Заметим, что максимальная доля пузыря в цене $\beta^*=\frac{1-e^{-\lambda\eta k}}{\lambda}(g-r)$ возрастает с возрастанием дисперсии во мнениях арбитражёров η. Аналогична зависимость от объёма денежных средств поведенческих агентов - k.

Наконец, β^* возрастает по $g-r$ (избыточный темп роста пузыря). Чем быстрее пузырь повышается в цене, тем более заманчивой является возможность поиграть на нём.

Замечания.

1) В рассмотренной ранее логике обратная индукция исключает существование пузыря, если момент переоценки является общим знанием (common knowledge). В этой модели фактическая дата краха пузыря

никогда не является common knowledge, даже среди массы $k<1$ агентов, которые знают, что пузырь существует, то есть тот факт, что в момент $t_0+\eta k$ существует пузырь – необщее знание (mutual knowledge) среди k трейдеров (они знают, что актив переоценён, но не знают, что k агентов об этом знают). Это становится известным только в момент $t_0+2\eta k$. Таким образом, наблюдается n-ный порядок знания, то есть в момент $t_0+n\eta k$ k агентов знают, что k агентов знают, что…, что k агентов знают, что существует пузырь.

2) Представленная в работе игра не с нулевой суммой. Рациональные агенты получают прибыль за счёт затрат поведенческих агентов.

2. Модель с крупным игроком

Пусть на фондовый рынок приходит крупный игрок. Термин «крупный» подразумевает бо́льшее количество ресурсов и соответственно акций, которыми он владеет, по сравнению с другими агентами.

Рассмотрим два случая:

1) крупный игрок является своего рода инсайдером и точно знает момент переоценки актива

2) крупный игрок получает шумный сигнал о моменте переоценки актива.

Обозначим богатство крупного трейдера μ. В модели предполагается, что крупный агент не может в одиночку произвести эндогенный крах: $\mu < k$. Пусть у каждого мелкого агента запас денежных средств составляет v, где $v \to 0$. Общий суммарный запас денежных средств мелких агентов равен 1 (нормировка сохранена как в статье Abreu и Brunnermeier, 2003).

Действия крупного игрока сливаются с действиями остальных, поэтому у мелких трейдеров нет возможности распознать действия крупного агента на рынке.

Так как мелкие агенты априори идентичны и малы, то они будут придерживаться симметричных стратегий. Кроме того, пусть все игроки придерживаются триггерных стратегий.

2.1. Крупный игрок – инсайдер

2.1.1. Описание модели. Аналитические результаты

Введём, как и в базовой статье, суммарное давление на цену всех мелких арбитражёров, как функцию времени и момента краха $s_{st}(t, t_0)$.

До момента $t_0+\tau^{st}$ никто из мелких агентов продавать не будет, значит, $s_{st}(t,t_0)=0$, затем каждый момент времени будет продавать $\frac{1}{\eta}$ арбитражёров, то есть за время t, продаст доля $\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)$ мелких трейдеров. Таким образом, функция суммарного давления на цену всех маленьких арбитражёров будет иметь следующий вид

$$s_{st}(t,t_0)=\begin{cases}0,\ \text{if}\ t\le t_0+\tau^{st}\\ \dfrac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right),\ \text{if}\ t_0+\tau^{st}<t\le t_0+\eta+\tau^{st}\\ 1,\ \text{if}\ t>t_0+\eta+\tau^{st}\end{cases} \tag{5}$$

Тогда давление мелких игроков на цену достигнет уровня $k-\mu$ в момент t^{st}: $\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)=k-\mu$. Таким образом, начиная с момента $t^{st}=t_0+(k-\mu)\eta+\tau^{st}$, совместное с крупным игроком давление на цену при продаже превысит пороговый уровень k.

До момента $t^{st}=t_0+(k-\mu)\eta+\tau^{st}$ крупный агент точно сможет продать все имеющиеся у него акции по переоценённой стоимости. Отметим, что непосредственно до момента t^{st} продавать не выгодно, а после этого момента крупный игрок сможет только часть акций продать по выгодной цене, а оставшиеся активы по фундаментальной (без пузыря).

Функция выигрыша (дисконтированная к моменту начала «новой» экономики $t=0$) крупного игрока

$$Pay\_off_{LT}(t)=\begin{cases}e^{-rt}p(t)\mu-c\mu,\ if\ \ t\le t^{st}\\ (\mu-\dfrac{t-t^{st}}{\eta})p(t)e^{-rt}+\dfrac{t-t^{st}}{\eta}(1-\beta(t-t_0))p(t)e^{-rt}-c\mu,\ if\ \ t^{st}<t<t^{st}+\mu\eta\\ (1-\beta(k\eta+\tau^{st}))p(t_0+k\eta+\tau^{st})e^{-r(t_0+k\eta+\tau^{st})}\mu-c\mu,\ if\ \ t>t^{st}+\mu\eta\end{cases} \tag{6}$$

где

$p(t)$ - цена переоценённого актива

$(1-\beta(t-t_0))p(t)$ - цена актива без пузыря

Крупный игрок в зависимости от параметров модели будет продавать свои активы либо в момент t^{st}, либо позже (на интервале $(t^{st}, t^{st}+\mu\eta)$).

Продавать лишь часть активов по переоцененной стоимости крупному игроку может быть выгодно в случае, если в новой экономике значительный темп роста и количество ресурсов у крупного игрока достаточно большое. В этом случае продажа части акций по цене, не содержащей пузыря, позволит отодвинуть момент краха, а значит, значительно увеличить цену до момента коллапса и продать часть активов по очень высокой цене.

Чтобы определить, в какой момент выгодно продавать крупному игроку, необходимо сравнить максимум выигрыша на интервале $t^{st} < t < t^{st} + \mu\eta$, с выигрышем в момент продажи t^{st}.

На рисунках 1 и 2 представлены функции выигрыша крупного игрока. На рисунке 1 отмечены моменты времени $t^{st} = 3{,}5451$ и $t^{st} + \mu\eta = 6{,}8351$. На рисунке 2 только $t^{st} = 7{,}8162$. Видно, что в первом случае максимум функции выигрыша крупного игрока лежит в интервале $(t^{st}, t^{st} + \mu\eta)$, а во втором достигается в момент t^{st}. На рисунке 1 представлена ситуация, когда крупному игроку выгодно часть активов продавать по цене без пузыря, а на рисунке 2 - все активы по цене с пузырём.

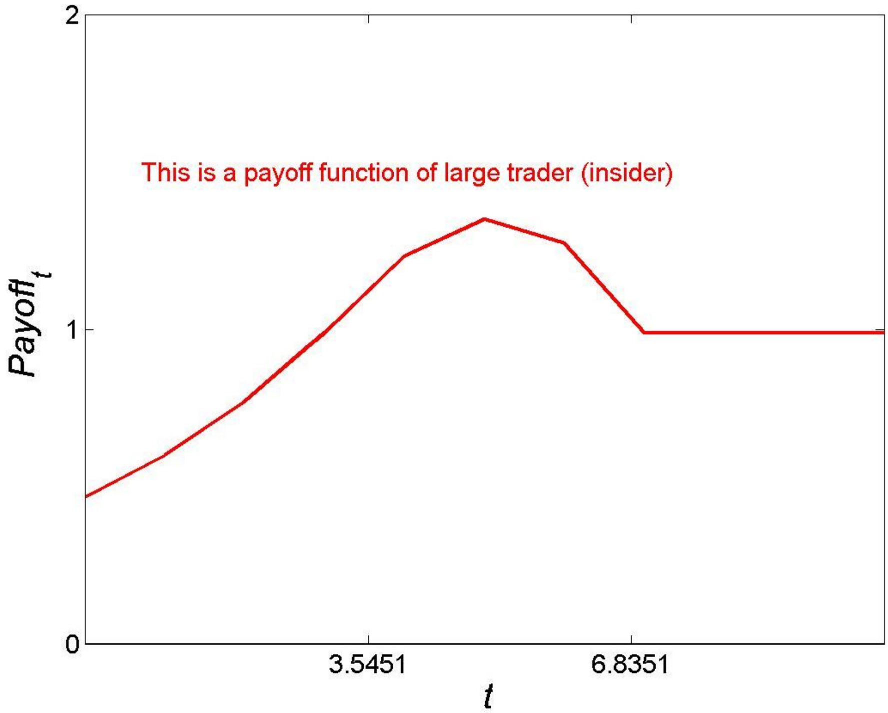

Рис. 1. Пример функции выигрыша крупного игрока, соответствующей значениям параметров $g = 0.3$, $r = 0.05$, $\eta = 7$; $\mu = 0.47$; $t_0 = 3$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$; $k = 0.5$

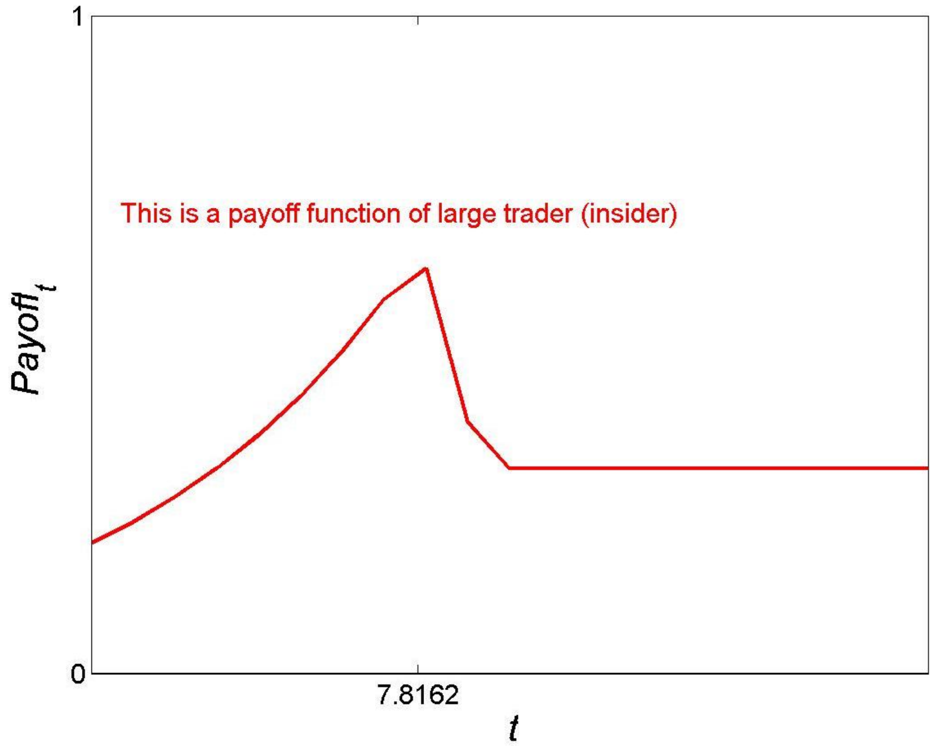

Рис. 2. Пример функции выигрыша крупного игрока, соответствующей значениям параметров $g=0.2$, $r=0.05$, $\eta=7$; $\mu=0.2$; $t_0=3$; $c=0.01$; $\lambda=0.1$; $k=0.8$

Рассмотрим функцию выигрыша на интервале $t^{st}<t<t^{st}+\mu\eta$ и найдём её максимум на этом интервале.

$$(\mu-\frac{t-t^{st}}{\eta})e^{-rt}p(t)+\frac{t-t^{st}}{\eta}(1-1+e^{-(g-r)(t-t_0)})e^{-rt}p(t)-c\mu\,,\ \beta(t-t_0)=1-e^{-(g-r)(t-t_0)},$$

$$(\mu-\frac{t-t^{st}}{\eta})e^{(g-r)t}+\frac{t-t^{st}}{\eta}e^{-(g-r)(t-t_0)}e^{(g-r)t}-c\mu\,,$$

$$(\mu-\frac{t-t^{st}}{\eta})e^{(g-r)t}+\frac{t-t^{st}}{\eta}e^{(g-r)t_0}-c\mu$$

На интервале $t^{st}<t<t^{st}+\mu\eta$ функция будет либо убывающей, тогда максимум достигается в точке t^{st}, либо выпуклой вверх с максимумом во внутренней точке. Возьмём производную по t и приравняем к 0.

$$-\frac{1}{\eta}e^{(g-r)t}+(g-r)(\mu-\frac{t-t^{st}}{\eta})e^{(g-r)t}+\frac{1}{\eta}e^{(g-r)t_0}=0$$

Произведя несколько алгебраических действий, получим

$(g-r)(t_0+k\eta+\tau^{st}-t)=1-e^{-(g-r)(t-t_0)}$, откуда максимальное значение $t\equiv t_{LT}$

$t_{LT}=f(t_0,k,\eta,g,r,\tau^{st})$. Отметим, что t_{LT} явно не зависит от μ.

Тогда оптимальное время ожидания крупного игрока после переоценки

$$\tau^{LT}=t_{LT}-t_0=f(t_0,k,\eta,g,r,\tau^{st})-t_0=ff(t_0,k,\eta,g,r,\tau^{st})$$

Проведём качественный анализ условия первого порядка.

При $t\to\infty$ левая часть $\to-\infty$, правая к 1, то есть в выражении $(g-r)(t_0+k\eta+\tau^{st}-t)=1-e^{-(g-r)(t-t_0)}$ вместо $=$ стоит знак $<$. При $t=t_0$ слева >0, справа 0, то есть знак $>$. Заметим также, что слева функция убывающая, справа – возрастающая (хоть и ограниченная), значит, внутри интервала

$[t_0,\infty)$ у рассматриваемой в задаче функции есть максимум, хотя он не обязательно попадает в требуемую область $t^{st} < t < t^{st} + \mu\eta$.

При $t = t^{st}$ слева $(g-r)\mu\eta$, справа $1-e^{-(g-r)((k-\mu)\eta+\tau)}$, должно быть $(g-r)\mu\eta > 1-e^{-(g-r)((k-\mu)\eta+\tau)}$

При $t = t^{st} + \mu\eta$ $(t_0 + k\eta + \tau)$ слева $(g-r)(\mu\eta - t^{st} - \mu\eta + t^{st})$=0, справа $1-e^{(g-r)(t_0-(t_0+k\eta+\tau))} = 1-e^{-(g-r)(k\eta+\tau)}$. Если $1-e^{-(g-r)(k\eta+\tau)} > 0$, что верно всегда.

Итак, условие, при котором крупному агенту выгодно какое-то время подождать после наступления момента t^{st} - $\mu\eta(g-r) > 1-e^{-(g-r)((k-\mu)\eta+\tau^{st})}$

Таким образом, в случае $\mu\eta(g-r) > 1-e^{-(g-r)((k-\mu)\eta+\tau^{st})}$ уравнение имеет одно решение $t > t^{st}$. Обозначим это решение - t^{LT}. Заметим, что даже если $t^{LT} \in [t_0, t^{st})$ (не может быть $t^{LT} \geq t^{st} + \mu\eta$) приведённая ниже формулировка τ^{LT} учитывает этот случай.

Тогда крупный агент начнёт продавать через τ^{LT} периодов, где $\tau^{LT} = \max\left[(k-\mu)\eta + \tau^{st}, t^{LT} - t_0\right]$, то есть τ^{LT} зависит от параметров μ, η, g, λ, r и τ^{st}. Аналитически вычислить момент t^{LT} не представляется возможным.

Построим оптимальный ответ мелких агентов на действия крупного, то есть определим, через сколько периодов после осведомления для них оптимальна продажа имеющегося актива.

Стратегии мелких игроков будут оставаться, как в базовой статье, симметричными и триггерными.

Коллапс произойдёт в момент $t_0 + \tau^{LT}$, когда крупный игрок начнёт продавать свои активы, то есть $\zeta = \tau^{LT}$.

$h(t_i + \tau \mid t_i) = \dfrac{\lambda}{1-e^{-\lambda(\zeta-\tau)}}$, поэтому

$\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(ff(t_0,k,\eta,g,r,\tau^{st})-\tau^{st})}}$ должно быть равно соотношению «издержки-выгоды» - $\frac{g-r}{\beta(f(t_0,k,\eta,g,r,\tau^{st}))}$ (должна быть монотонно убывающая функция τ),

Если $\mu\eta(g-r)\le 1-e^{-(g-r)((k-\mu)\eta+\tau^{st})}$, тогда $\tau^{LT}=(k-\mu)\eta+\tau^{st}$. Вычислим в этом случае оптимальный отклик мелких агентов.

$\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda((k-\mu)\eta+\tau^*-\tau^*)}}=\frac{g-r}{\beta((k-\mu)\eta+\tau^*)}$, то есть уровень риска $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(k-\mu)\eta}}$ - не зависит от τ , а $\frac{g-r}{\beta((k-\mu)\eta+\tau)}$ - убывающая функция τ . Поэтому имеется единственное решение

$\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(k-\mu)\eta}}=\frac{g-r}{\beta((k-\mu)\eta+\tau^*)}$, откуда

$$\beta((k-\mu)\eta+\tau^*)=\frac{g-r}{\lambda}(1-e^{-\lambda(k-\mu)\eta}),$$

$$(k-\mu)\eta+\tau^*=\beta^{-1}\left(\frac{g-r}{\lambda}(1-e^{-\lambda(k-\mu)\eta})\right),$$

$\tau^*=\beta^{-1}\left(\frac{g-r}{\lambda}(1-e^{-\lambda(k-\mu)\eta})\right)-(k-\mu)\eta$ - через столько периодов после осведомления о переоценке актива маленькие агенты будут продавать.

$$\beta(t-t_0)=1-e^{-(g-r)(t-t_0)},\quad \beta(\tau)=1-e^{-(g-r)\tau},\quad e^{-(g-r)\tau}=1-\beta,\quad -(g-r)\tau=\ln(1-\beta),$$

$$\tau=\frac{\ln(1-\beta)}{r-g},\quad \beta^{-1}(\beta)=\frac{\ln(1-\beta)}{r-g},$$

$$\tau^*=\frac{\ln(1-\frac{g-r}{\lambda}(1-e^{-\lambda(k-\mu)\eta}))}{r-g}-(k-\mu)\eta$$

Тогда крупный игрок будет продавать свои активы в момент $t_0+(k-\mu)\eta-\frac{\ln(1-\frac{g-r}{\lambda}(1-e^{-\lambda(k-\mu)\eta}))}{g-r}-(k-\mu)\eta=t_0-\frac{\ln(1-\frac{g-r}{\lambda}(1-e^{-\lambda(k-\mu)\eta}))}{g-r}$, который будет совпадать с моментом краха.

Сравнить со случаем, когда на рынке присутствуют только мелкие игроки, в данной постановке задачи не представляется возможным. Дело в том, что согласно формулировке задачи введённый крупный агент привносит дополнительные средства для атаки пузыря. Без него максимальное давление равняется 1, а с ним $1+\mu$.

Если $\tau^{LT} = t^{LT} - t_0$, то аналитически получить результат не возможно. Однако, следует отметить, что в этом случае оптимальное τ^{st}, которое определяется из равенства

$\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(f(t_0,k,\eta,g,r,\tau^{st})-\tau^{st})}} = \frac{g-r}{\beta(f(t_0,k,\eta,g,r,\tau^{st}))}$ - зависит от t_0,k,η,λ,g,r ($\tau^{st} = \tau^{opt}(t_0,k,\eta,\lambda,g,r)$) и <u>не зависит от</u> μ. Таким образом, в случае, когда решение внутреннее оно не будет зависеть от μ.

Утверждение. При $\mu > \mu^*$ момент краха и оптимальные стратегии игроков не зависят от μ, где μ^* - решение уравнения $\mu^*\eta(g-r) = 1 - e^{-(g-r)((k-\mu^*)\eta + \tau^{opt}(t_0,k,\eta,\lambda,g,r))}$ и $\tau^{st} = \tau^{opt}(t_0,k,\eta,\lambda,g,r)$

В этом случае решение для крупного агента становится «внутренним», то есть оптимальный момент продажи лежит в интервале $(t^{st};t^{st}+\mu\eta)$.

Экономическая интуиция следующая. Крупному игроку может быть выгодно, жертвуя частью активов и продавая их по цене без пузыря, ждать дольше, давая пузырю вырасти. В такой ситуации увеличение средств этого игрока не меняет его позицию, так как если он решит продать все активы по цене с пузырём, то пузырь лопнет раньше, а значит, вырастет к тому моменту не значительно. По существу крупный игрок уже сталкивался с таким выбором и пришёл к выводу, что оптимально продавать позже, точно определив момент. Добавление «лишних» ресурсов не меняет его решения.

Ниже приведены численные результаты.

Отметим, что крах произойдёт раньше, чем при отсутствии крупного игрока (инсайдера), поэтому маленькие игроки спешат быстрее избавиться от переоценённого актива.

2.1.2. Результаты численного счёта

Рассмотрим последствия присутствия на рынке крупного агента.

Результат 1. Функция выигрыша крупного игрока при некоторых значениях параметров может достигать максимума при продаже части активов по цене без пузыря. Это происходит по следующей причине. Момент краха происходит в момент продажи крупным игроком своих активов. Если крупный игрок ждёт дольше, то с одной стороны пузырь успевает значительно вырасти (особенно при существенных отличиях в темпах роста старой и новой экономик), но с другой, часть активов ему приходится продавать по цене без пузыря. При определённом соотношении параметров выигрыш от прироста цены актива оказывается больше, чем потери от продажи части актива по цене без пузыря.

Результат 2. При $\mu > \mu^*$ момент краха и оптимальные стратегии игроков не зависят от μ, где μ^* - решение уравнения $\mu^*\eta(g-r) = 1 - e^{-(g-r)((k-\mu^*)\eta + \tau^{opt}(t_0,k,\eta,\lambda,g,r))}$ и $\tau^{st} = \tau^{opt}(t_0,k,\eta,\lambda,g,r)$.

Крупному агенту может быть выгодно продавать часть акций по цене без пузыря. При этом в таком случае часть активов он сможет продать по ещё более выросшей цене, так как, откладывая момент продажи, крупный игрок откладывает и момент краха. Если при некотором запасе ресурсов реализуется описанная выше ситуация, то для всех бóльших значений количества денег крупному игроку будет невыгодно изменять своё решение о моменте продажи, так как это приведёт к более раннему коллапсу. А выгоды между продажей в выбранный момент и в любой более ранний крупный игрок уже сравнил. Измениться оптимальный момент продажи не может, так как реализация всех активов по цене с пузырём подразумевает более раннюю продажу, выгоды от которой ниже, чем от выбранного момента. Поэтому, начиная с некоторого запаса ресурсов у крупного игрока, стратегии игроков и момент краха не будет зависеть от запаса денег у этого агента.

Результат 3. На рисунке 3 представлена зависимость количества периодов, которые выжидают агенты после получения информации о переоценке актива в зависимости от объёма рынка (количества средств у поведенческих агентов). Значения параметра $k < 0.8$ дают «внутреннее» решение (то есть оптимально часть активов продавать по цене без пузыря) для крупного агента, $k \geq 0.8$ - «краевое». Зависимость при этом непрерывная. Интуиция следующая: при большом запасе ресурсов у крупного игрока и незначительном объёме средств у поведенческих агентов, продажа крупным агентом всех активов по цене с пузырём приведёт к очень раннему моменту краха, а следовательно, к незначительно выросшей цене и его небольшому выигрышу. Поэтому при небольшом k крупному игроку выгодно ждать дольше.

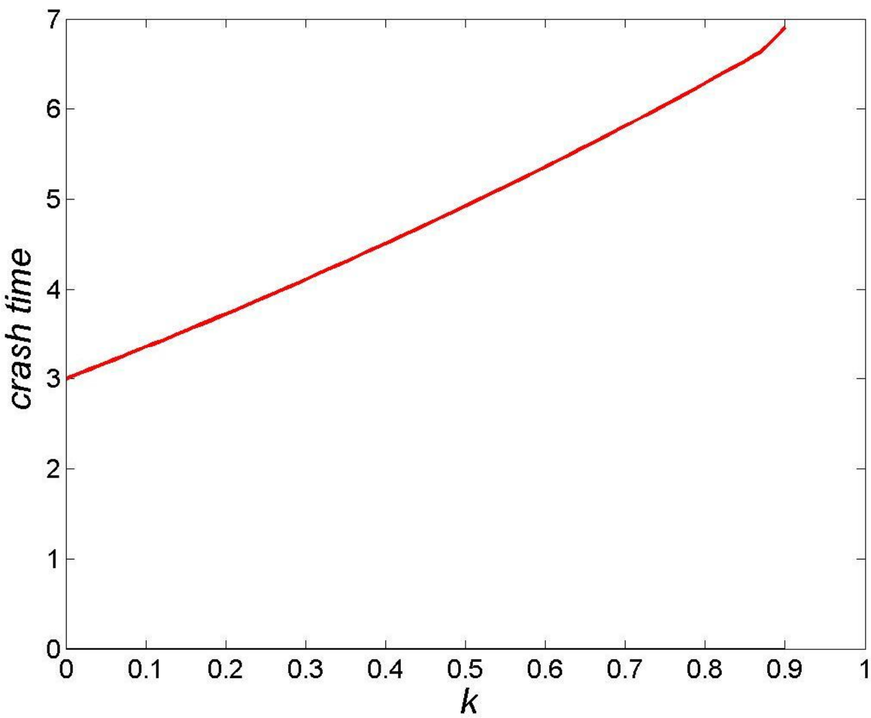

Рис. 3. Момент финансового краха, соответствующий значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 7$; $\mu = 0.4$; $t_0 = 3$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$

Результат 4. В присутствии на рынке крупного игрока – инсайдера мелкие агенты начинают меньше времени ждать с момента осведомления до момента продажи. Это происходит в силу того, что крупный игрок привносит дополнительные средства на рынок, хотя средства поведенческих агентов не изменяются.

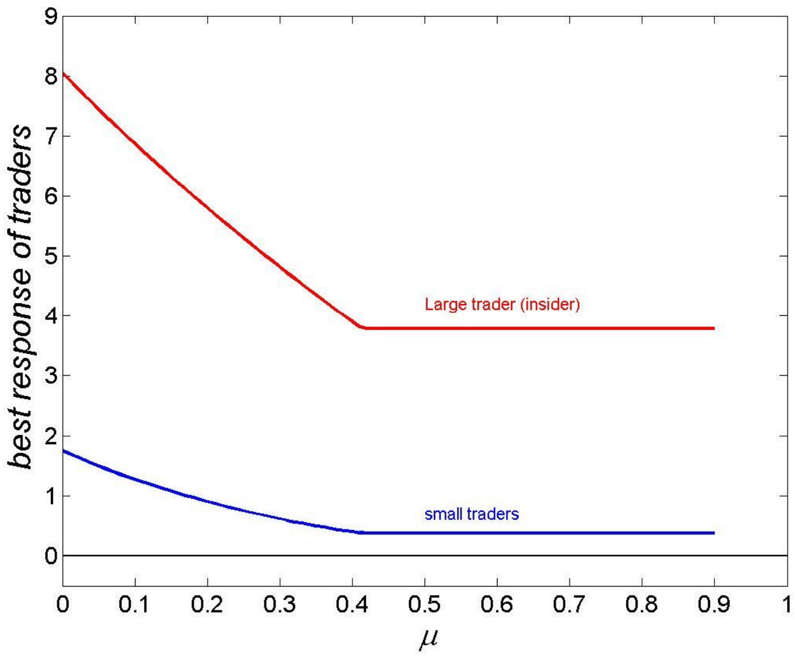

Рис. 4. Оптимальные стратегии игроков при параметрах $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 7$; $k = 0.91$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$

Результат 5. Момент краха (в случае эндогенного краха) наступит раньше, чем при отсутствии крупного игрока: $t_0 + \tau^{LT} < t_0 + k\eta + \tau^*$ независимо от того, продаёт крупный агент все акции по цене с пузырём или предпочитает часть активов продать по фундаментальной стоимости. На рисунке 5 представлена зависимость момента краха от запаса денежных ресурсов у крупного ирока.

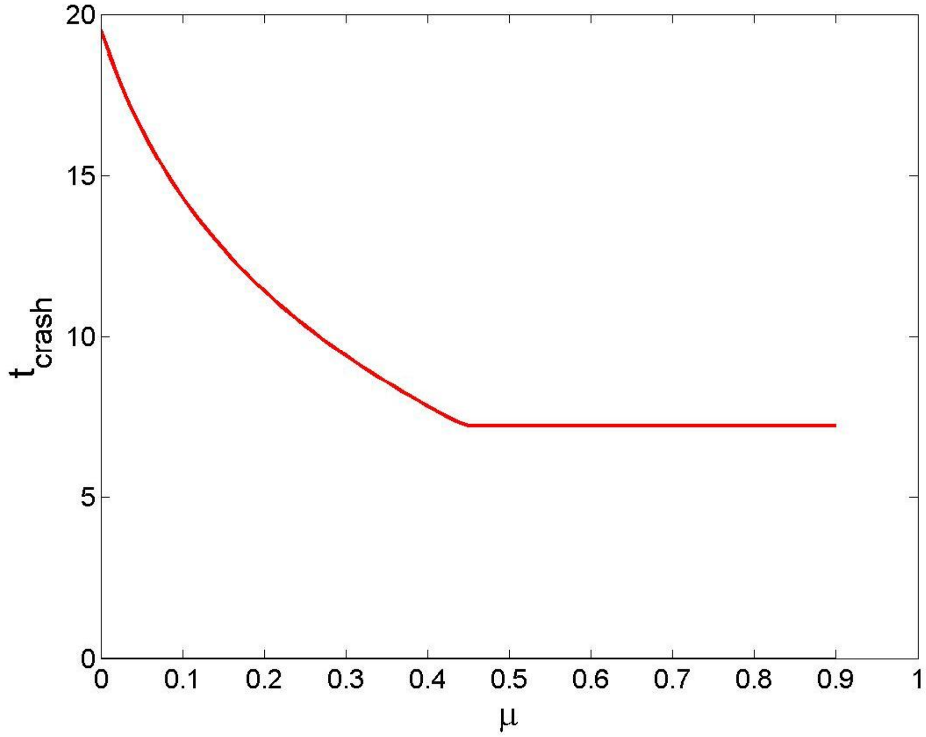

Рис. 5. Момент краха в зависимости от μ*, соответствующий значениям параметров* $g = 0.2$*,* $r = 0.05$*,* $\eta = 7$*;* $k = 0.91$*;* $t_0 = 3$*;* $c = 0.01$*;* $\lambda = 0.1$

В случае, когда у поведенческих агентов большой запас ресурсов, а у крупного игрока относительно немного средств, то ему целесообразнее все активы продавать по цене с пузырём, так как до момента его продажи цена вырастет достаточно сильно. В случае, когда денежные ресурсы крупного игрока велики, ему выгоднее ждать дольше и продавать часть активов по цене без пузыря (ведь только в этом случае к моменту его продажи цена вырастет значительно).

Результат 6. Чем более точный сигнал получают маленькие агенты, тем меньше возможности у кого-либо (крупного или мелких агентов) нажиться на пузыре. Дело в том, что когда момент переоценки актива является общим знанием (common knowledge) итеративная процедура, описанная в базовой статье, становится активна, приводя к коллапсу точно в момент переоценки. Она заключается в следующем. В случае, если ни один из агентов не будет продавать свои акции, создавая давление на цену, пузырь всё равно лопнет от экзогенных причин в момент $t_0 + \bar{\tau}$. Так как каждый агент становится осведомлённым о переоценке актива после момента t_0, то он точно может быть уверен, что в момент через $\bar{\tau}$ периодов после получения им сигнала пузыря уже не будет. Таким образом, игроку оптимально выйти с рынка до этого момента. Однако, предположение, что все арбитражёры играют на пузыре меньше периодов, чем $\bar{\tau}$, приводит к новой дате дефолта и новому наиболее оптимальному отклику со стороны игрока. Продолжая данные рассуждения, индуктивно получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 0$, что мешает появлению пузыря.

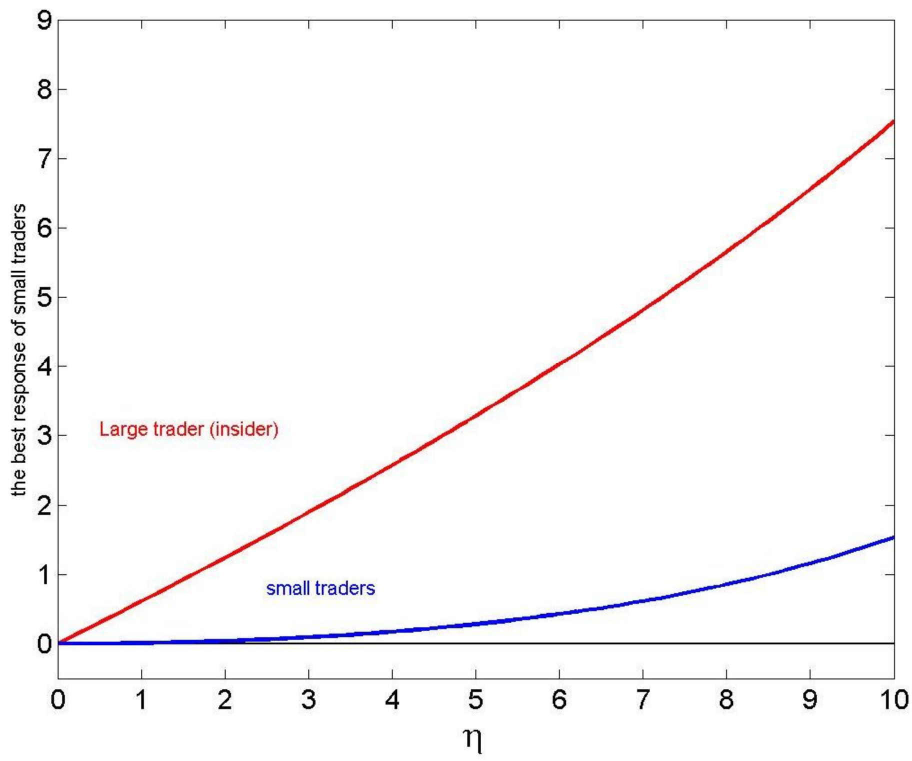

Рис. 6. Оптимальные стратегии крупного и мелких игроков в зависимости от точности сигнала у мелких игроков, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 7$; $\mu = 0.3$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$, $k = 0.9$

Отметим, что данный результат показывает важность информации на финансовых рынках и необходимость учёта информационных трений.

Рассмотрим случай, когда крах носит экзогенный характер, то есть происходит из-за внешний причин.

Предположим, что пузырь лопнет от экзогенных причин, тогда $\zeta = \bar{\tau}$ и уровень риска соответственно $h = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda(\bar{\tau} - \tau)}}$, то есть возрастающая функция τ. Такая ситуация возможна при существенной дисперсии мнений среди маленьких арбитражёров (η), значительной ресурсной базе поведенческих агентов (k) и при не очень больших ресурсах у крупного агента (μ). Об этом знают все, включая крупного агента.

Так как крупный агент инсайдер, то он точно знает момент времени $t_0 + \bar{\tau}$. Выгоднее всего для него продажа за секунду до краха, то есть в момент $t_0 + \bar{\tau}$. Однако, он должен быть уверен, что для продажи его активов покупательной способности поведенческих агентов будет достаточно. Другими словами, в момент $t_0 + \bar{\tau}$, даже с учётом давления крупного агента на цену μ критический порог не должен быть преодолён или к моменту $t_0 + \bar{\tau}$ давление должно быть строго меньше $k - \mu$. В терминах временных интервалов условие будет выглядеть следующим образом: $t_0 + \bar{\tau} < t_0 + (k - \mu)\eta + \tau^{st}$.

Чтобы понять, как будут себя вести маленькие агенты необходимо сравнить их уровень риска со значением соотношения «издержки-выгоды» (агенты понимают, что крупному игроку-инсайдеру будет выгодно продавать в $t_0 + \bar{\tau}$, поэтому их задача просто продать до момента экзогенного краха). Так как экзогенный крах не зависит от τ, а случается строго в момент $t_0 + \bar{\tau}$, то соотношение «издержки-выгоды» постоянно и равно $\frac{g-r}{\beta}$.

Итак, точка пересечения (или равенство уровня риска соотношению «издержки-выгоды») - τ_1:

$$\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda(\bar{\tau}-\tau)}}=\frac{g-r}{\bar{\beta}}$$

$$\tau^{st}=\bar{\tau}-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{g-r}{g-r-\lambda\bar{\beta}}\right)$$

Чтобы крах действительно случился экзогенно $t_0+\bar{\tau}<t_0+(k-\mu)\eta+\tau^{st}$, то есть

$$t_0+\bar{\tau}<t_0+(k-\mu)\eta+\bar{\tau}-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{g-r}{g-r-\lambda\bar{\beta}}\right),\ 0<(k-\mu)\eta-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{g-r}{g-r-\lambda\bar{\beta}}\right),$$

$(k-\mu)\eta>\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{g-r}{g-r-\lambda\bar{\beta}}\right)$ - соотношение параметров, при котором крах произойдёт экзогенно.

$\frac{g-r}{\lambda\bar{\beta}}>\frac{1}{1-e^{-\lambda(k-\mu)\eta}}$, то есть экзогенный крах возможен при больших значениях k,η, $g-r$ и малых μ, $\bar{\beta}$.

Случай экзогенного краха с крупным агентом аналогичен экзогенному краху без него.

2.2. Шумный сигнал у крупного игрока

2.2.1. Постановка задачи

Пусть крупный агент не осведомлён о точном моменте, когда произошла переоценка актива.

Для последующего изучения влияния зашумлённости сигнала крупного игрока на равновесие, введём для крупного игрока собственное окно получения сигнала: η_{LT}. Таким образом, крупный агент может получить информацию о переоценке актива во временном промежутке

$[t_0, t_0 + \eta_{LT}]$. Пусть распределение его сигнала на данном интервале, как и у мелких игроков, равномерное.

2.2.2. Функция выигрыша крупного игрока

Пусть t_{LT} - момент, когда крупный игрок получил сигнал о переоценке. Апостериорное распределение t_0 с точки зрения крупного игрока t_{LT} зависит от того, получил ли крупный игрок сигнал слишком рано относительно момента t_0 ($t_{LT} - \eta_{LT} < 0$) или нет ($t_{LT} - \eta_{LT} \geq 0$).

Легко показать, что $\Phi(t_0 \mid t_{LT}) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda \eta_{LT}} - e^{\lambda(t_{LT} - t_0)}}{e^{\lambda \eta_{LT}} - 1}, & if\ t_{LT} - \eta_{LT} \geq 0 \\ \dfrac{e^{\lambda t_{LT}} - e^{\lambda(t_{LT} - t_0)}}{e^{\lambda \eta_{LT}} - 1}, & if\ t_{LT} - \eta_{LT} < 0 \end{cases}$

Для определения равновесия и оптимальных стратегий игроков построим функцию ожидаемого выигрыша для крупного и мелких агентов.

В отличие от статьи определение функций выигрыша производится относительно момента переоценки t_0, а не момента краха. В данном случае такой отсчёт является более удобным, так как в присутствие на рынке крупного игрока с зашумлённым сигналом о моменте переоценки актива момент краха однозначно не определён и зависит не только от параметров модели, но и от момента получения сигнала крупным игроком.

Введём, как и в базовой статье, понятие суммарного давления на цену всех мелких арбитражёров, как функцию времени и момента переоценки актива $s_{st}(t, t_0)$. Функция суммарного давления на цену всех мелких арбитражёров будет иметь следующий вид

$$s_{st}(t,t_0)=\begin{cases}0,\ \text{if } t\le t_0+\tau^{st}\\ \dfrac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right),\ \text{if } t_0+\tau^{st}<t\le t_0+\eta+\tau^{st}\\ 1,\ \text{if } t>t_0+\eta+\tau^{st}\end{cases} \tag{7}$$

Дело в том, что до момента $t_0+\tau^{st}$ никто из мелких агентов не будет продавать имеющиеся активы, значит, $s_{st}(t,t_0)=0$. На интервале $t_0+\tau^{st}<t\le t_0+\eta+\tau^{st}$ в каждый момент времени $\frac{1}{\eta}$ арбитражёров будет продавать, то есть за время t, продаст доля $\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)$ мелких трейдеров.

Используя понятие суммарного давления на цену мелких арбитражёров, построим функцию выигрыша крупного игрока:

$$ExpPayOff(t\,|\,t_{LT})=\int\limits_{\max(0,t_{LT}-\eta_{LT})}^{t_{LT}} P_{LT}(t)d\Phi_{\eta_{LT}}(t_0\,|\,t_{LT})-c\mu \tag{8}$$

где $P_{LT}(t)=\begin{cases}e^{-rt}p(t)\mu,\ if\ s_{st}(t,t_0)\le k-\mu\\ (k-s_{st}(t,t_0))p(t)e^{-rt}+(s_{st}(t,t_0)+\mu-k)e^{(g-r)t_0},\ if\ k-\mu<s_{st}(t,t_0)<k\\ e^{(g-r)t_0}\mu,\ if\ s_{st}(t,t_0)>k\end{cases}$

Учитывая определение $\Phi(t_0\,|\,t_{LT})$, имеем

$$ExpPayOff(t\,|\,t_{LT})=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{t_{LT}-\eta_{LT}}^{t_{LT}} P_{LT}(t)\frac{\lambda e^{\lambda(t_{LT}-t_0)}}{e^{\lambda\eta_{LT}}-1}dt_0,\ if\ t_{LT}-\eta_{LT}\ge 0\\ \displaystyle\int\limits_{0}^{t_{LT}} P_{LT}(t)\frac{\lambda e^{\lambda(t_{LT}-t_0)}}{e^{\lambda t_{LT}}-1}dt_0,\ if\ t_{LT}-\eta_{LT}<0\end{cases}-c\mu \tag{9}$$

Логика построения функции $P_{LT}(t)$ (функция выигрыша крупного игрока при условии, что он знает момент времени t_0) заключается в следующем. Если давление на цену со стороны мелких агентов не превышает $k-\mu$, то крупный игрок может продать все свои акции по переоценённой стоимости и получить доход, равный $e^{-rt}p(t)\mu$ (с учётом дисконтирования). Когда давление на цену со стороны мелких агентов превысило $k-\mu$, но ещё не достигло отметки k, крупный игрок может только часть активов продать по цене с пузырём. Его доход в этом случае составляет $(k-s_{st}(t,t_0))p(t)e^{-rt}+(s_{st}(t,t_0)+\mu-k)(1-\beta(t-t_0))p(t)e^{-rt}$. И, наконец, в случае, когда давление на цену со стороны мелких агентов превысило объём денежных средств квази-шумных агентов, крупный игрок с учётом дисконтирования с каждой акции получает доход, равный цене актива без пузыря в момент краха.

Таким образом, функция выигрыша крупного игрока при условии, что он знает момент времени t_0 имеет следующий вид

$$P_{LT}(t)=\begin{cases} e^{-rt}p(t)\mu,\ if\ s_{st}(t,t_0)\le k-\mu \\ (k-s_{st}(t,t_0))p(t)e^{-rt}+(s_{st}(t,t_0)+\mu-k)(1-\beta(t-t_0))p(t)e^{-rt},\ if\ k-\mu< s_{st}(t,t_0)<k \\ (1-\beta(k\eta+\tau^{st}))p(t_0+k\eta+\tau^{st})e^{-r(t_0+k\eta+\tau^{st})}\mu,\ if\ s_{st}(t,t_0)>k \end{cases}$$

,

Учитывая, что $\beta(t-t_0)=1-e^{-(g-r)(t-t_0)}$, $p(t)=e^{gt}$, легко видеть, что

$$P_{LT}(t)=\begin{cases} e^{-rt}p(t)\mu,\ if\ s_{st}(t,t_0)\le k-\mu \\ (k-s_{st}(t,t_0))p(t)e^{-rt}+(s_{st}(t,t_0)+\mu-k)e^{(g-r)t_0},\ if\ k-\mu< s_{st}(t,t_0)<k \\ e^{(g-r)t_0}\mu,\ if\ s_{st}(t,t_0)>k \end{cases} \tag{10}$$

Принимая во внимание отсутствие точного знания о моменте переоценки у крупного игрока и взвешивая функцию $P_{LT}(t)$ по вероятностям для момента t_0, получаем итоговый вид функции выигрыша крупного агента $ExpPayOff(t\,|\,t_{LT})$.

2.2.3. Функция выигрыша мелкого игрока

Определим функцию выигрыша мелкого игрока. Отметим, что у всех мелких арбитражёров она будет одна и та же, так как априори они одинаковые.

Для этого введём функцию давления на цену со стороны крупного игрока, как функцию моментов времени t, t_0, t_{LT}. Отметим, что до момента времени $t_{LT}+\tau^{LT}$ давление на цену со стороны крупного агента равно 0, затем μ.

$$s_{LT}(t,t_{LT})=\begin{cases}0,\ \text{if } t<t_{LT}+\tau^{LT}\\ \mu,\ \text{if } t\geq t_{LT}+\tau^{LT}\end{cases} \text{ или } s_{LT}(t,t_{LT})=\mu\cdot step(t-(t_{LT}+\tau^{LT})) \tag{11}$$

где $step(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ 0, else\end{cases}$

Учитывая формулу (7), общее давление на цену со стороны мелких и крупного агента $s(t,t_0,t_{LT})=s_{st}(t,t_0)+s_{LT}(t,t_{LT})$

Принимая во внимание различные временные интервалы, получим

$s(t,t_0,t_{LT})$	$t_{LT}\leq t-\tau^{LT}$	$t_{LT}>t-\tau^{LT}$
$t_0<t-\eta-\tau^{st}$	$1+\mu$	1
$t-\eta-\tau^{st}\leq t_0<t-\tau^{st}$	$\mu+\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)$	$\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)$
$t_0\geq t-\tau^{st}$	μ	0

Тогда функция выигрыша маленького агента

$$ExpPayOff(t\,|\,t_i)=\int\limits_{\max(0,t_i-\eta)}^{t_i}\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\eta_{LT}} f(t_{LT}\,|\,t_0)P_i(t,t_0,t_{LT})dt_{LT}\right)d\Phi(t_0\,|\,t_i)-cv \tag{12}$$

где

$P_i(t,t_0,t_{LT})=\begin{cases}e^{-rt}p(t)v,\ if\ s(t,t_0,t_{LT})<k\\ (1-\beta(t^{crash}-t_0))p(t^{crash})e^{-rt^{crash}}v,\ if\ s(t,t_0,t_{LT})\geq k\end{cases}$, где t^{crash} определяется из условия $s(t^{crash},t_0)=k$,

$$f(t_0\,|\,t_i)=\begin{cases}\dfrac{\lambda e^{\lambda(t_i-t_0)}}{e^{\lambda\eta}-1},\ if\ t_i-n\geq 0\\ \dfrac{\lambda e^{\lambda(t_i-t_0)}}{e^{\lambda t_i}-1},\ if\ t_i-n<0\end{cases},$$

$$ExpPayOff(t\,|\,t_i)=\int\limits_{\max(0,t_i-\eta)}^{t_i}\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\eta_{LT}}\frac{1}{\eta_{LT}}P_i(t,t_0,t_{LT})dt_{LT}\right)f(t_0\,|\,t_i)dt_0 \tag{13}$$

Для повышения эффективности численного счёта упростим приведённую функцию выигрыша мелкого игрока (13).

Найдем такие соотношения параметров (интервалы) t_0, t, η, τ^{st} и t_{LT}, t, τ^{LT}, чтобы $s(t, t_0, t_{LT})$ на этих интервалах однозначно сравнивалась с k.

$s(t,t_0,t_{LT})$	$t_{LT} \le t-\tau^{LT}$	$t_{LT} > t-\tau^{LT}$
$t_0 < t-\eta-\tau^{st}$	$1+\mu$>k	1>k
$t-\eta-\tau^{st} \le t_0 < t-\tau^{st}$	$\mu+\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)$	$\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)$
$t_0 \ge t-\tau^{st}$	μ<k	0<k

На среднем интервале для t_0 (при $t-\eta-\tau^{st} \le t_0 < t-\tau^{st}$) однозначно сказать нельзя каким образом значения функции $s(t,t_0,t_{LT})$ соотносятся с k, поэтому разобьём этот интервал на подынтервалы:

$\mu+\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)$ будет $<k$, если $\mu+\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)<k$ или $t_0 > t-\tau^{st}-\eta(k-\mu)$. Отметим, что $t-\tau^{st}-\eta < t-\tau^{st}-\eta(k-\mu) < t-\tau^{st}$

$s(t,t_0,t_{LT})$	$t_{LT} \le t-\tau^{LT}$	$t_{LT} > t-\tau^{LT}$
$t_0 < t-\eta-\tau^{st}$	$1+\mu$>k	1>k
$t-\eta-\tau^{st} \le t_0 \le t-\tau^{st}-\eta(k-\mu)$	$\mu+\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)$> =k	$\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)$
$t-\tau^{st}-\eta(k-\mu) < t_0 < t-\tau^{st}$	$\mu+\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)$<k	$\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)$
$t_0 \ge t-\tau^{st}$	μ<k	0<k

Аналогично, $\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right)<k$, если $t-\tau^{st}-k\eta<t_0$. Отметим, что $t-\tau^{st}-\eta < t-\tau^{st}-k\eta < t-\tau^{st}-\eta(k-\mu)$.

$s(t,t_0,t_{LT})$	$t_{LT} \le t-\tau^{LT}$	$t_{LT} > t-\tau^{LT}$

$t_0 < t-\eta-\tau^{st}$	$1+\mu >$ k	$1 >$ k
$t-\eta-\tau^{st} \le t_0 \le t-\tau^{st}-k\eta$	$\mu+\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right) >=$ k	$\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right) >=$ k
$t-\tau^{st}-k\eta < t_0 \le t-\tau^{st}-\eta(k-\mu)$	$\mu+\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right) >=$ k	$\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right) <$ k
$t-\tau^{st}-\eta(k-\mu) < t_0 < t-\tau^{st}$	$\mu+\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right) <$ k	$\frac{1}{\eta}\left(t-t_0-\tau^{st}\right) <$ k
$t_0 \ge t-\tau^{st}$	$\mu <$ k	$0 <$ k

$$P_i(t,t_0,t_{LT}) = \begin{cases} e^{(g-r)t}\nu, \ if \ \ s(t,t_0,t_{LT}) < k \\ e^{(g-r)t_0}\nu, \ if \ \ s(t,t_0,t_{LT}) \ge k \end{cases}$$

Теперь вычислим функцию $P_i(t,t_0,t_{LT})$ на построенных интервалах

$P_i(t,t_0,t_{LT})$	$t_{LT} \le t-\tau^{LT}$	$t_{LT} > t-\tau^{LT}$
$t_0 < t-\eta-\tau^{st}$	$e^{(g-r)t_0}\nu$	$e^{(g-r)t_0}\nu$
$t-\eta-\tau^{st} \le t_0 \le t-\tau^{st}-k\eta$	$e^{(g-r)t_0}\nu$	$e^{(g-r)t_0}\nu$
$t-\tau^{st}-k\eta < t_0 \le t-\tau^{st}-\eta(k-\mu)$	$e^{(g-r)t_0}\nu$	$e^{(g-r)t}\nu$
$t-\tau^{st}-\eta(k-\mu) < t_0 < t-\tau^{st}$	$e^{(g-r)t}\nu$	$e^{(g-r)t}\nu$
$t_0 \ge t-\tau^{st}$	$e^{(g-r)t}\nu$	$e^{(g-r)t}\nu$

Итого,

$P_i(t,t_0,t_{LT})$	$t_{LT} \le t-\tau^{LT}$	$t_{LT} > t-\tau^{LT}$
$t_0 \le t-\tau^{st}-k\eta$	$e^{(g-r)t_0}\nu$	$e^{(g-r)t_0}\nu$
$t-\tau^{st}-k\eta < t_0 \le t-\tau^{st}-\eta(k-\mu)$	$e^{(g-r)t_0}\nu$	$e^{(g-r)t}\nu$
$t_0 > t-\tau^{st}-\eta(k-\mu)$	$e^{(g-r)t}\nu$	$e^{(g-r)t}\nu$

Определим функцию $P_i(t,t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\eta_{LT}} \frac{1}{\eta_{LT}} P_i(t,t_0,t_{LT})dt_{LT}$

$\int\limits_{t_0}^{t_0+\eta_{LT}} \frac{1}{\eta_{LT}} P_i(t,t_0,t_{LT})dt$	$t-\tau^{LT}$	$t_0 < t-\tau^{LT} \le t_0+\eta_{LT}$	$t_0+\eta_{LT} <$

$t_0 \le t-\tau^{st}-k\eta$	$\frac{1}{\eta_{LT}}e^{(g-r)t_0}v(t_0+\eta_{LT}-t_0)=e^{(g-r)t_0}v$		
$t-\tau^{st}-k\eta < t_0 \le t-\tau$	$e^{(g-r)t}$	$\frac{1}{\eta_{LT}}e^{(g-r)t_0}v(t-\tau^{LT}-t$ $+\frac{1}{\eta_{LT}}e^{(g-r)t}v(t_0+\eta_{LT}$ $=\frac{1}{\eta_{LT}}v(e^{(g-r)t_0}(t-\tau^{LT}$ $+e^{(g-r)t}(t_0+\eta_{LT}-t+\tau$	$e^{(g-r)t_0}v$
$t_0 > t-\tau^{st}-\eta(k-\mu)$	$e^{(g-r)t}v$		

Таким образом, в численном счёте используется функция

$$ExpPayOff(t\,|\,t_i)=\int\limits_{\max(0,t_i-\eta)}^{t_i} P_i(t,t_0)f(t_0\,|\,t_i)dt_0$$

где $f(t_0\,|\,t_i)=\begin{cases}\dfrac{\lambda e^{\lambda(t_i-t_0)}}{e^{\lambda\eta}-1},\ if\ t_i-n\ge 0\\ \dfrac{\lambda e^{\lambda(t_i-t_0)}}{e^{\lambda t_i}-1},\ if\ t_i-n<0\end{cases}$

Численно рассчитываются моменты времени, при которых функция выигрыша крупного и мелких игроков достигают максимума. После чего вычисляется оптимальное время ожидания после осведомления о переоценке для крупного и мелких игроков.

Ниже приведены результаты численного счёта.

2.2.4. Результаты численного счёта

Рассмотрим, как изменяются стратегии мелких игроков и момент краха с появлением на рынке крупного игрока. Кроме того, сравним случай точного сигнала о моменте переоценки актива у крупного игрока с шумным.

ПАРАМЕТРЫ	Крупный игрок - инсайдер	Крупный игрок получает шумный сигнал
Присутствует крупный игрок	$\mu > 0$, $\eta_{LT} = 0$	$\mu > 0$, $\eta_{LT} > 0$
Не присутствует крупный игрок	$\mu = 0$	$\mu = 0$

Кроме того, рассмотрим, какие из результатов, полученных для экономики с инсайдером, сохраняются в случае, когда крупный игрок получает шумный сигнал о моменте переоценке актива.

Результат 1. При некоторых соотношениях параметров (см. численные примеры ниже), как и в случае инсайдера, начиная с некоторого значения $\mu > \mu^*$ момент краха и оптимальные стратегии игроков не зависят от μ. На рисунках 7 и 8 приведён пример параметров модели, при которых выполняется этот результат. При указанных соотношениях параметров начиная с $\mu^* = 0.7$ (то есть при $\mu > \mu^*$) оптимальные стратегии игроков и момент краха не зависит от μ.

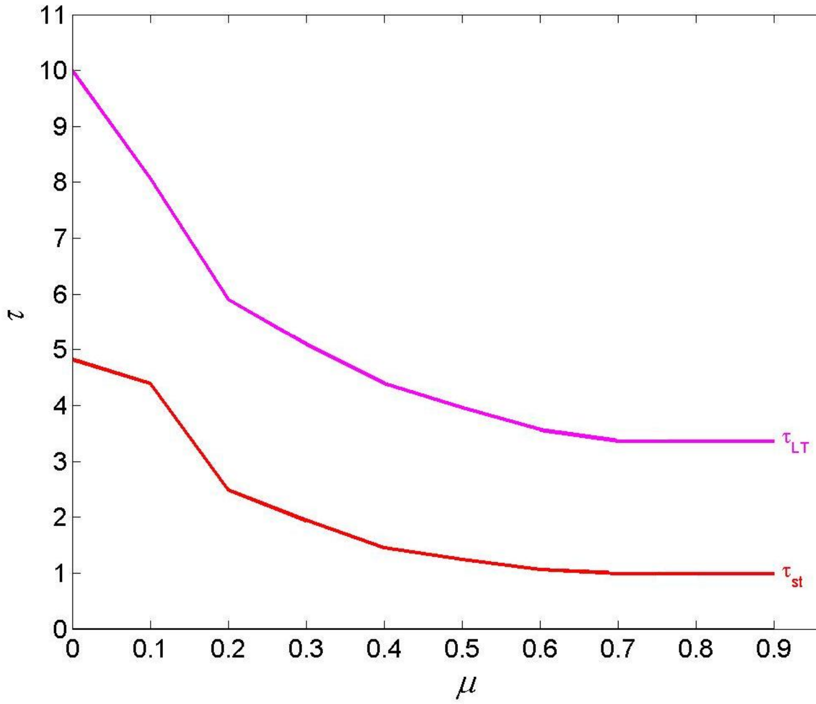

Рис. 7. Оптимальные стратегии крупного и мелких игроков, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 10$; $c = 0.01$; $\eta_{LT} = 5$; $\lambda = 0.1$, $k = 0.91$.

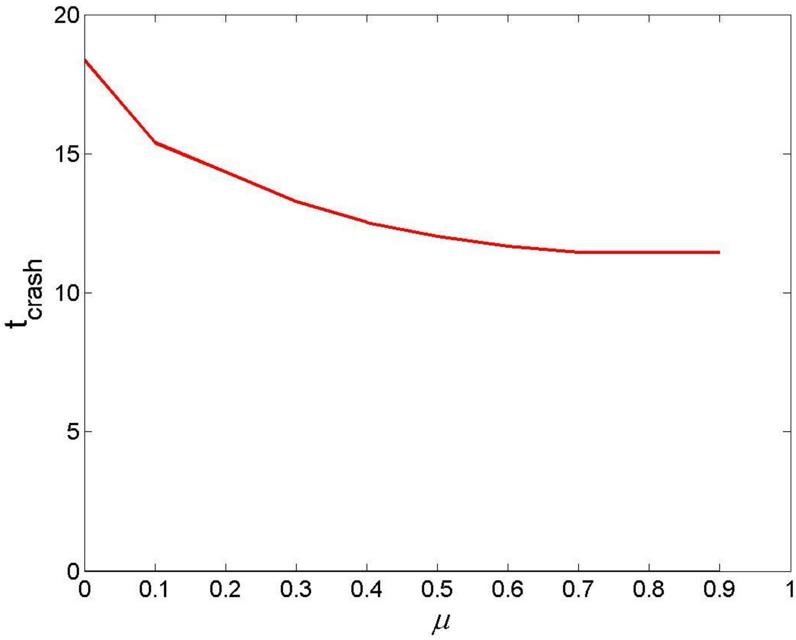

Рис. 8. Моменты краха, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 10$; $c = 0.01$; $\eta_{LT} = 5$; $\lambda = 0.1$, $k = 0.91$.

Отметим, что данный результат сохраняется в случае, когда крупный игрок имеет более точный сигнал, чем мелкие. На рисунке 9 представлена зависимость запаса денежных средств крупного игрока, начиная с которого равновесие (стратегии игроков и момент краха) не зависят от запаса денежных средств у крупного игрока (μ^*), от точности сигнала крупного игрока.

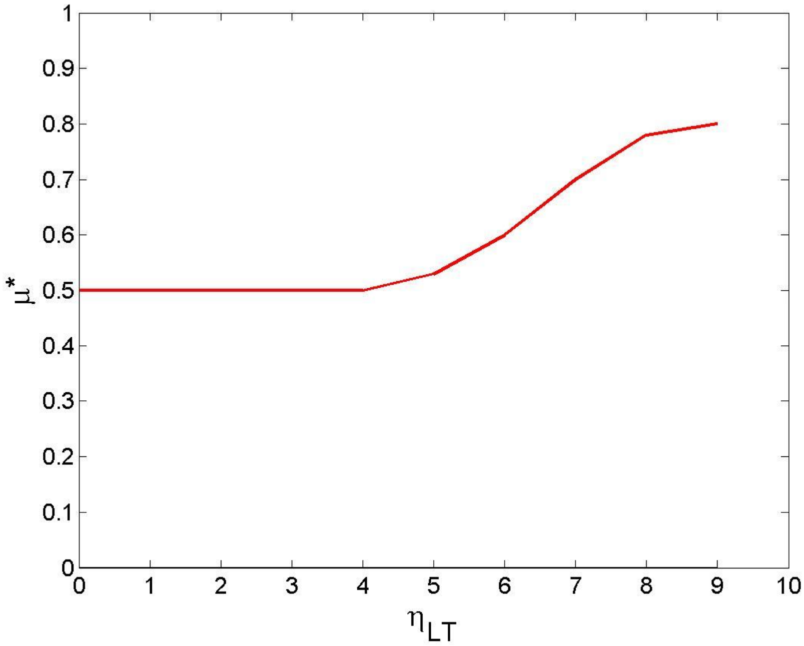

Рис. 9. Зависимость критического уровня запаса денежных средств у крупного игрока от точности его сигнала $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 10$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$, $k = 0.91$

При этом существуют комбинации параметров, при которых данное утверждение не сохраняется. Например, при одинаково достаточно шумном сигнале у крупного и мелких игроков. Иллюстрации приведены на рисунках 10 и 11.

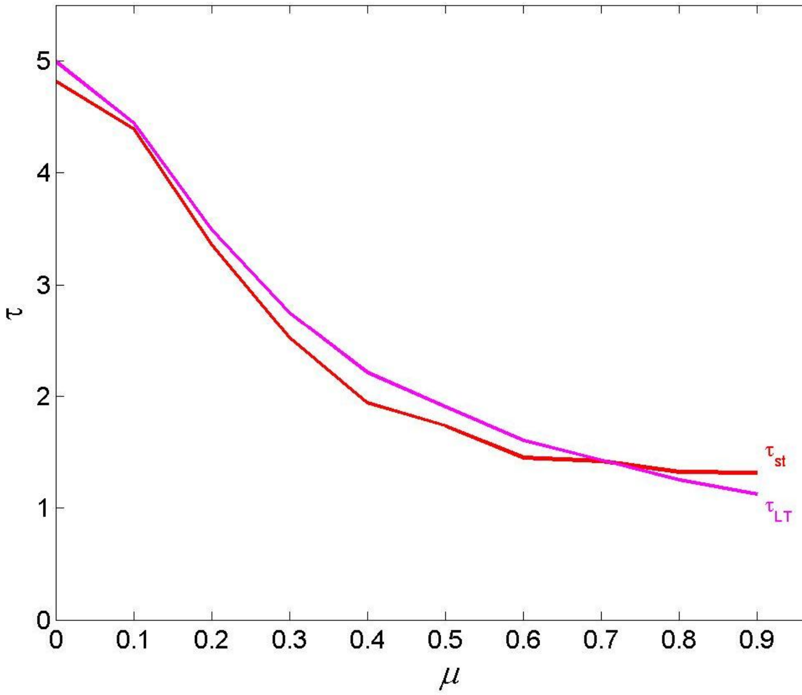

Рис. 10. Оптимальные стратегии крупного и мелких игроков, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 10$; $c = 0.01$; $\eta_{LT} = 11$; $\lambda = 0.1$, $k = 0.91$

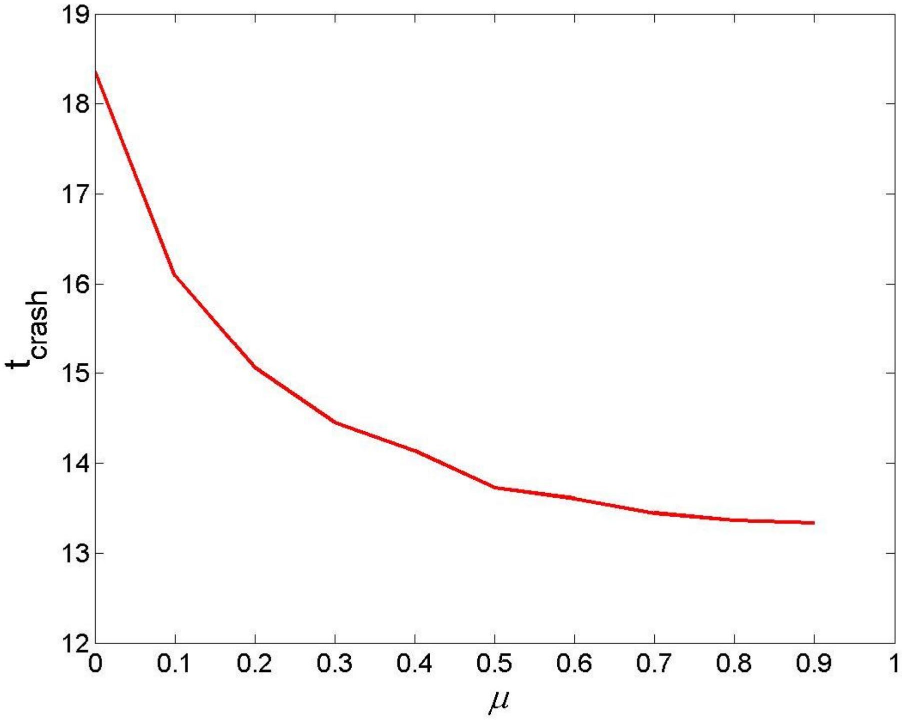

Рис. 11. Моменты краха, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 10$; $c = 0.01$; $\eta_{LT} = 10$; $\lambda = 0.1$, $k = 0.91$

Результат 2. В присутствие на рынке крупного игрока при небольшом запасе денежных средств и шумном сигнале о моменте переоценки у этого агента, мелкие арбитражёры не меняют стратегию поведения в случае значительного отличия темпов роста старой и новой экономики.

При значительных ресурсах у крупного, несмотря на значительную разницу в темпах роста, мелкие игроки начинают продавать быстрее.

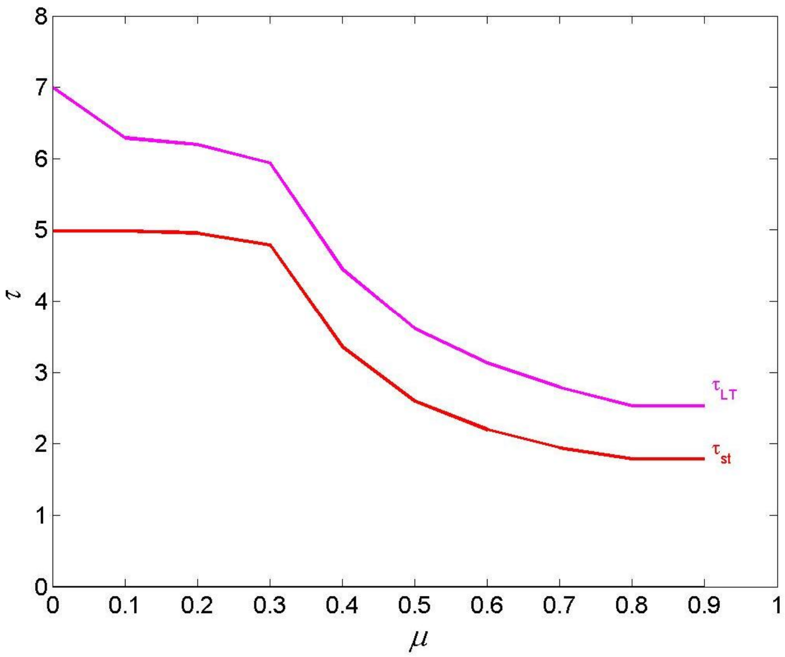

Рис. 12. Оптимальные стратегии крупного и мелких игроков, соответствующие значениям параметров $g = 0.3$, $r = 0.05$, $\eta = 7$; $c = 0.01$; $\eta_{LT} = 5$; $\lambda = 0.1$, $k = 0.91$

Отметим, что когда крупный игрок получает более шумный сигнал, чем мелкие игроки, этот результат сохраняется. То есть при небольших запасах ресурсов у крупного агента, мелкие арбитражёры не меняют свою стратегию поведения. На рисунке 13 приведена зависимость запаса количества денежных средств крупного игрока, до которого мелкие не меняют свою стратегию поведения (μ^{**}), от зашумлённости сигнала крупного игрока. Заметим, что критическое значение запаса ресурсов крупного игрока в этом случае растёт линейно от зашумлённости сигнала.

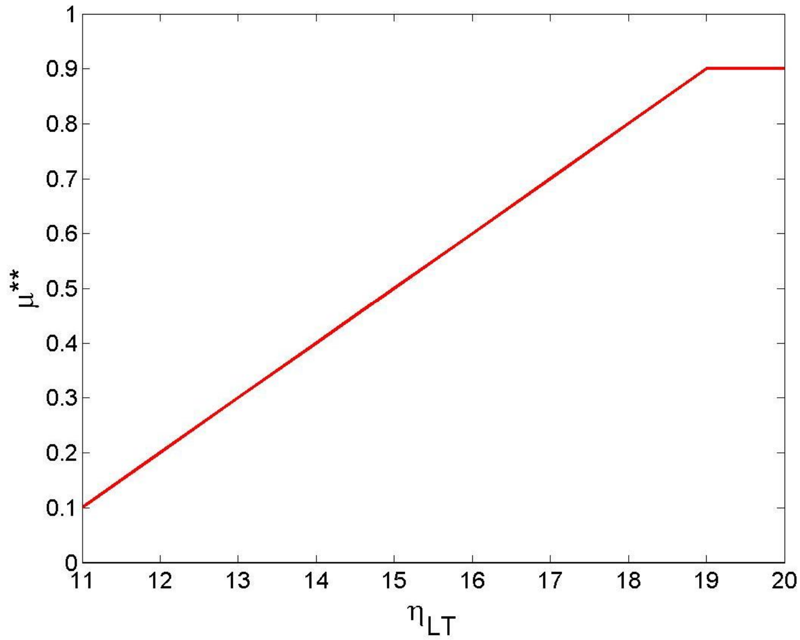

Рис. 13. Зависимость критического уровня запаса денежных средств у крупного игрока от точности его сигнала $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 10$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$, $k = 0.91$

Результат 3. Момент краха при определённых параметрах наступит раньше, чем при отсутствии крупного игрока.

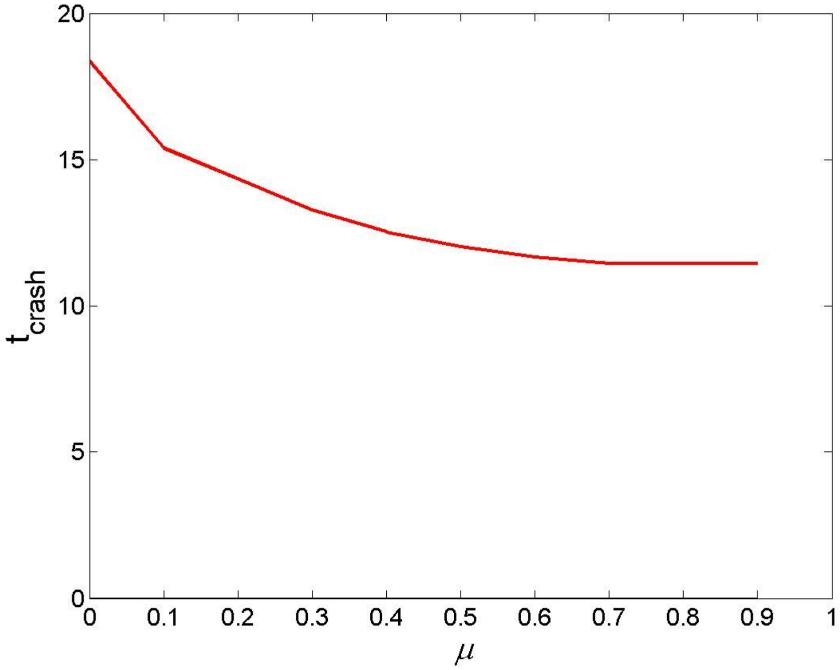

Рис. 14. Моменты краха, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$; $\eta = 10$; $c = 0.01$; $\eta_{LT} = 5$; $\lambda = 0.1$; $k = 0.91$

В отличие от случая инсайдера при зашумлённом сигнале (когда сигнал крупного агента менее точный, чем у мелких) и небольшом объёме ресурсов у крупного игрока момент краха может не измениться. Подобная ситуация не реализуется в случае с инсайдером.

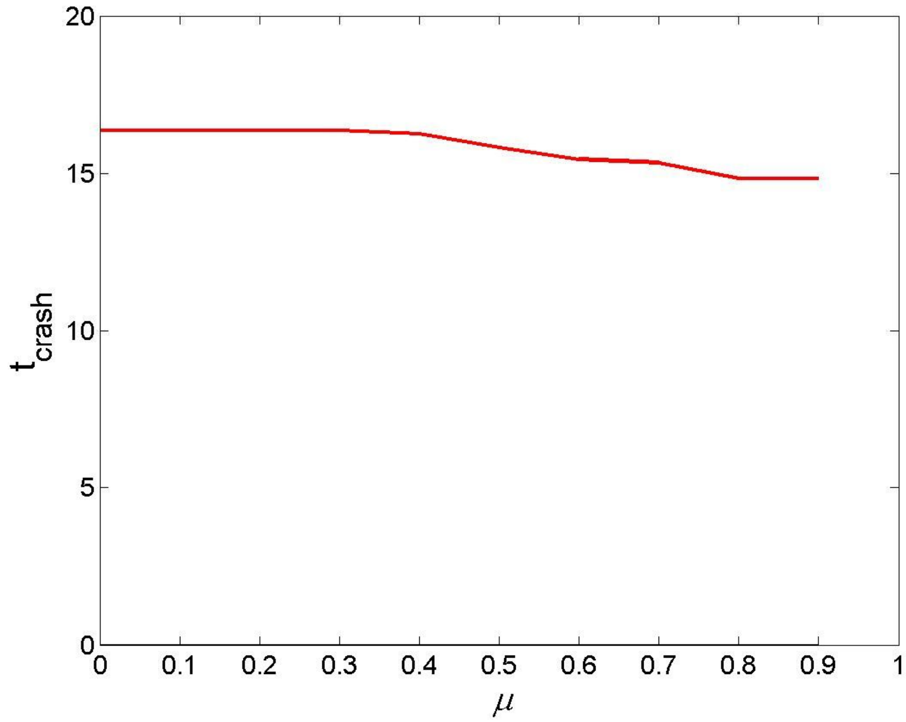

Рис. 15. Моменты краха, соответствующие значениям параметров $g = 0.3$, $r = 0.05$; $\eta = 7$; $c = 0.01$; $\eta_{LT} = 12$; $\lambda = 0.1$; $k = 0.91$.

Отметим, что при указанных параметрах, когда $\mu \le 0.3$, присутствие на рынке крупного игрока не меняет момент краха.

Результат 4. При определённых соотношениях параметров при уменьшении точности своего сигнала (увеличении окна) крупный игрок начинает ждать меньшее количество времени после осведомления, в то время как мелкие, наоборот, увеличивают время ожидания.

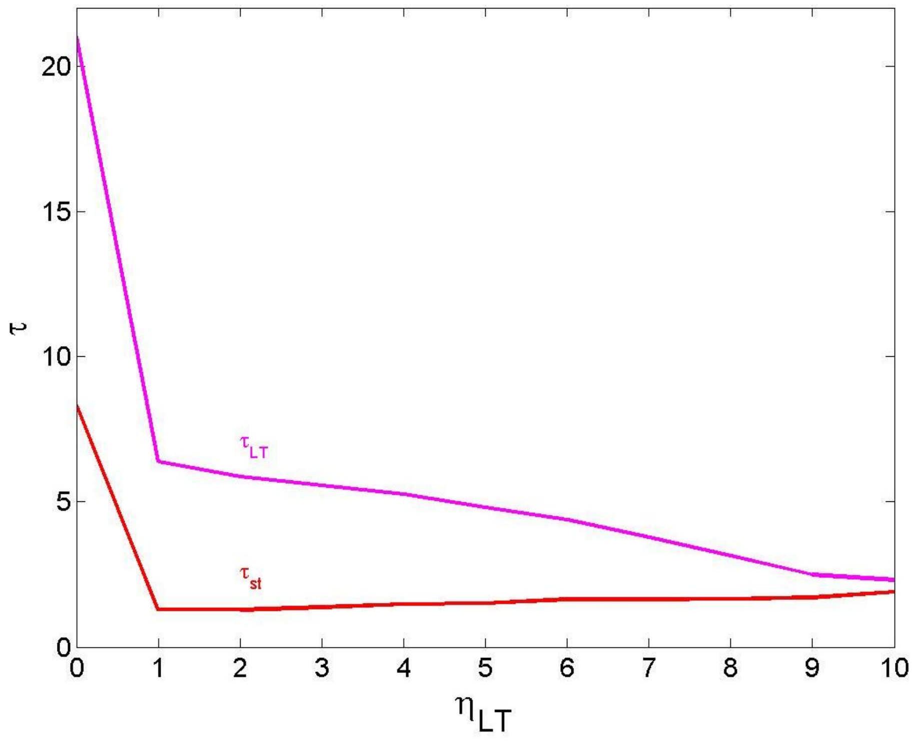

Рис. 16. Оптимальные стратегии крупного и мелких игроков, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 10$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$; $\mu = 0.5$; $k = 0.91$

При этом момент краха отодвигается от момента переоценки актива.

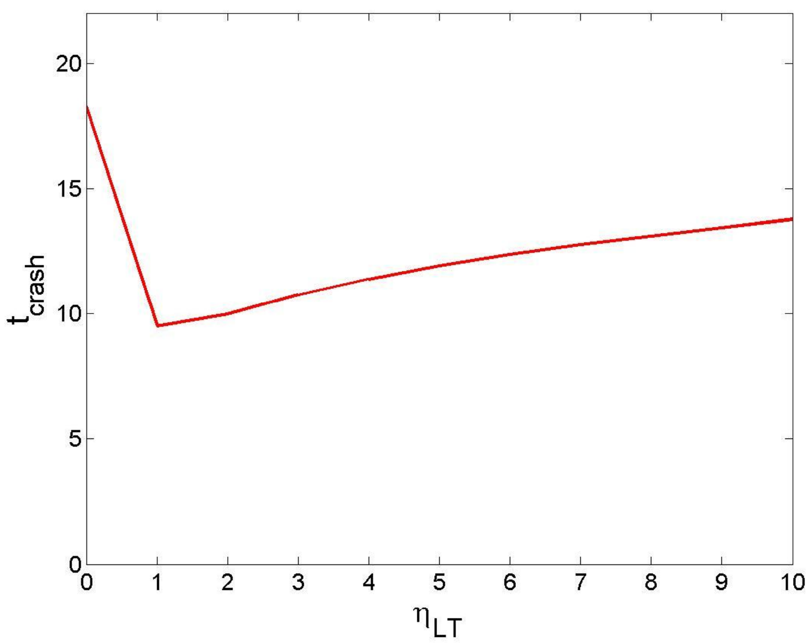

Рис. 17. Моменты финансового краха, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 10$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$; $\mu = 0.5$; $k = 0.91$, $t_0 = 5$

Отметим, что время ожидания до продажи крупного и мелких игроков в данном случае качественно отличаются от ситуации, когда первый является инсайдером. А именно стратегии игроков различны в случае, когда $\eta_{LT} \to 0$ и $\eta_{LT} = 0$. С математической точки зрения функции $\tau_{st}(\eta_{LT})$ и $\tau_{LT}(\eta_{LT})$ терпят разрыв в нуле, то есть $\lim\limits_{\eta_{LT} \to 0} \tau_{st}(\eta_{LT}) \neq \tau_{st}(0)$ и $\lim\limits_{\eta_{LT} \to 0} \tau_{LT}(\eta_{LT}) \neq \tau_{LT}(0)$.

Таким образом, для крупного игрока существенно различны ситуации, когда он владеет точной информацией и когда получает даже немного зашумлённый сигнал.

При небольшом запасе денежных средств у крупного игрока на стратегию мелких агентов не влияет уровень точности его сигнала.

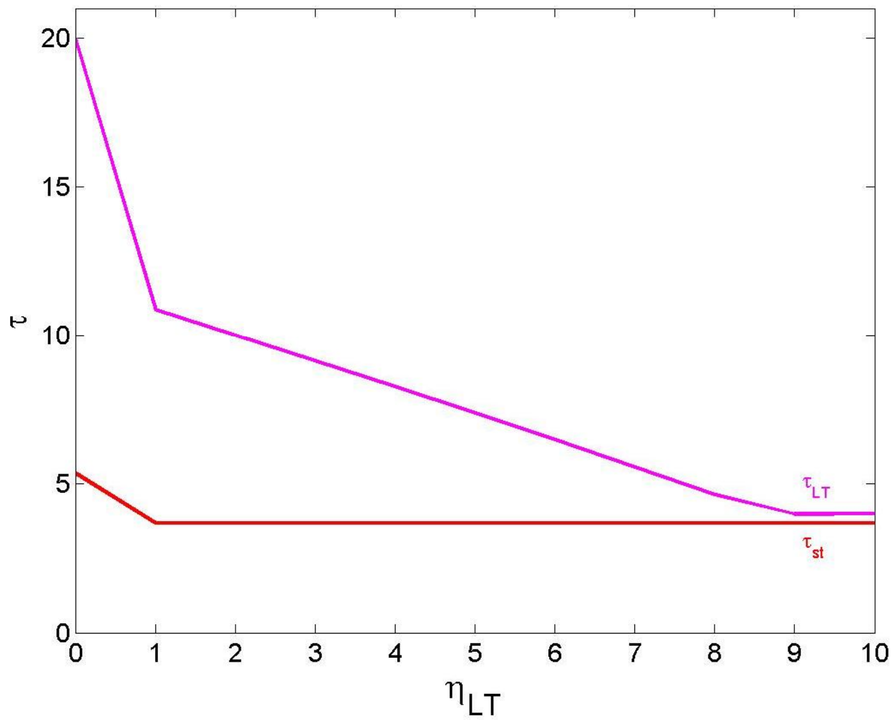

Рис. 18. Оптимальные стратегии крупного и мелких игроков, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 10$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$; $\mu = 0.1$; $k = 0.9$, $t_0 = 5$

При этом момент краха

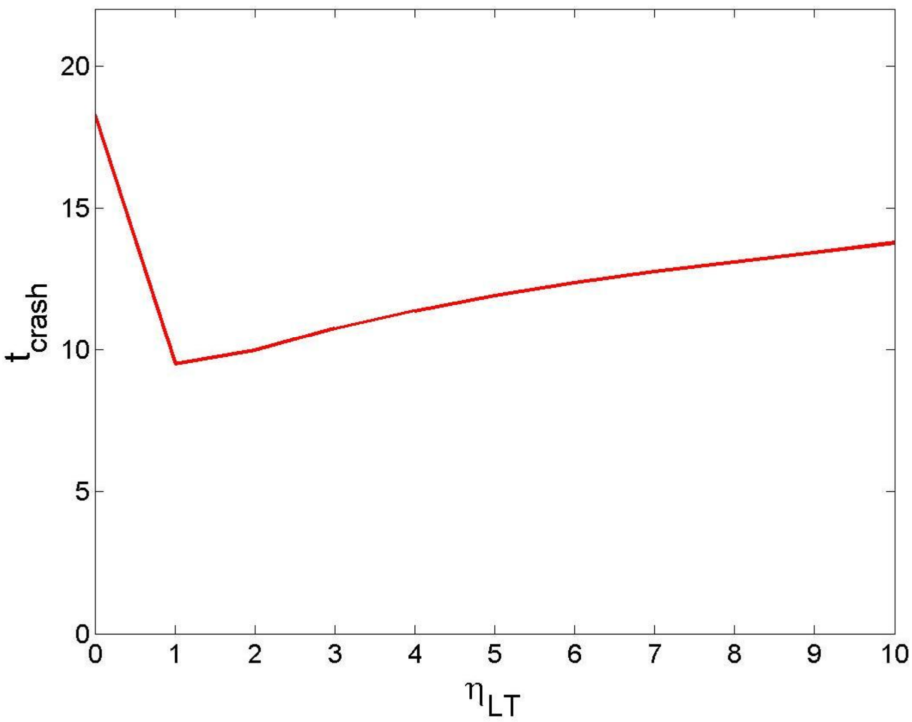

Рис. 19. Моменты финансового краха, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 10$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$; $\mu = 0.1$; $k = 0.9$; $t_0 = 5$

При определённых соотношениях параметров, начиная с некоторой точности сигнала крупного игрока, стратегии арбитражёров и момент краха не зависят от размера его окна.

Так при незначительном запасе денежных ресурсов у крупного игрока и достаточно точном сигнале у мелких агентов, когда размер окна крупного игрока достигает окна мелких, его последующее увеличение не меняет оптимальные стратегии игроков.

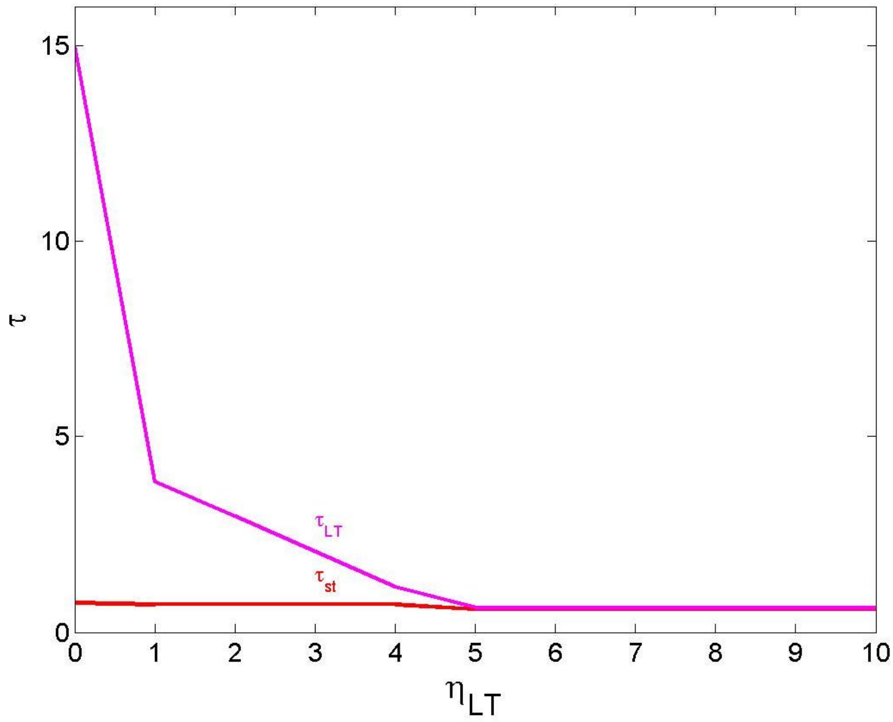

Рис. 20. Оптимальные стратегии крупного и мелких игроков, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 5$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$; $\mu = 0.1$; $k = 0.9$

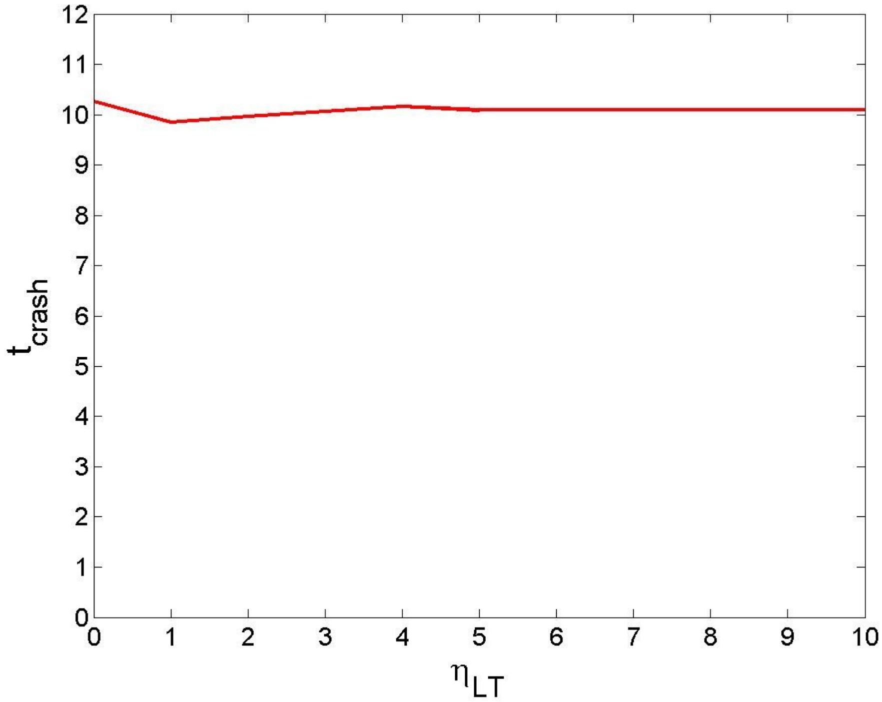

Рис. 21. Моменты краха, соответствующие значениям параметров $g = 0.2$, $r = 0.05$, $\eta = 5$; $c = 0.01$; $\lambda = 0.1$; $\mu = 0.1$; $k = 0.9$, $t_0 = 5$

Заключение

В диссертационной работе построена теоретико-игровая модель, основанная на статье Abreu и Brunnermeier. В указанной статье авторы показали, что на финансовом рынке может существовать пузырь, несмотря на присутствие рациональных арбитражёров, которые знают, что актив переоценён и, более того, могут совместными усилиями вернуть цены к эффективным. В модели Abreu и Brunnermeier на рынке присутствуют только мелкие агенты в смысле имеющихся у них ресурсов. Однако, в реальности агентами финансового рынка являются не только отдельные трейдеры, но и разнообразные фонды или так называемые крупные игроки.

В диссертационной работе построена модель, аналогичная Abreu и Brunnermeier, но с добавлением крупного игрока. Под крупным понимается игрок, у которого значительно бóльшие ресурсы по сравнению с другими участниками рынка.

Рассмотрены два случая. Первый – ситуация, когда крупный игрок является инсайдером и обладает точным знанием о моменте переоценки актива. Второй – когда крупный игрок, как и мелкие арбитражёры, получает шумный сигнал.

В обоих случаях с появлением на рынке крупного игрока в модели сохраняется единственное равновесие при широком классе набора параметров. При этом, однако, в большинстве случаев изменяются его характеристики. Так, в случае, когда крупный игрок является инсайдером, мелкие агенты начинают меньше времени ждать после осведомления, что приводит к ответной реакции крупного игрока и более раннему краху. В случае, когда сигнал крупного игрока более шумный, чем у мелких и запас средств значительный, его приход на рынок может вообще не поменять равновесие при определённых параметрах.

Для случая, когда крупный игрок является инсайдером, согласно модели получено несколько интересных теоретических и/или численных результатов. Так, при некоторых соотношениях параметров (например, при большом запасе денежных средств у крупного игрока и относительно небольшом объёме денег у поведенческих агентов) крупному игроку может быть выгодно продавать часть активов по цене без пузыря, оттягивая, таким образом, момент краха и получая возможность продать оставшиеся активы по большей цене. Кроме того, в работе доказано, что начиная с некоторого значения запаса денежных средств у крупного игрока, оптимальные стратегии игроков и момент краха не зависит от его запасов. Дело в том, что, начиная с некоторого объёма денежных средств, добавление крупному игроку дополнительных ресурсов не приводит к изменению его решения относительно оптимального момента продажи, который соответствует ситуации продажи части активов по цене без пузыря. Действительно, если бы крупный игрок решил изменить своё решение после получения дополнительных средств и продать часть активов раньше, то он получил бы меньшую прибыль, так как подобные ситуации уже сравнивал.

В случае, когда крупный игрок обладает шумным сигналом, модель не позволяет получить аналитические результаты. Наиболее важными результатами численного счёта являются следующие.

Во-первых, как и в случае инсайдера, при определённых значениях параметров (при достаточно большом различие в темпах роста старой и новой экономик и более точном сигнале у крупного игрока относительно мелких), начиная с некоторого запаса денежных средств у крупного игрока, мелкие игроки, и как следствие крупный игрок, не меняют свою стратегию, что автоматически означает неизменность момента краха. При этом существуют наборы параметров (например, при одинаковых довольно шумных сигналах обоих типов игроков) при которых данных результат не сохраняется.

Во-вторых, в отличие от случая с инсайдером, появление на рынке крупного игрока, который получает шумный сигнал о моменте переоценки актива, может при некоторых параметрах (при значительных различиях в темпах роста в старой и новой экономиках и небольшом запасе ресурсов у крупного игрока) не влиять на стратегию мелких игроков. При небольших ресурсах у крупного игрока и значительно зашумлённом сигнале (более шумном, чем у мелких игроков) не измениться не только оптимальная стратегия мелких игроков, но и момент краха, что не реализуется в случае инсайдера.

В-третьих, на характеристики равновесных стратегий игроков и момент краха существенное влияние оказывает точность сигнала крупного игрока. При большинстве наборов параметров переход от точного к даже немного зашумлённому сигналу крупного игрока значительно сокращает время ожидания мелких и крупного игрока и соответственно приближает момент краха. Это происходит потому, что для крупного игрока переход от точного знания к вероятностным возможностям разрывен. В случае зашумлённого сигнала он начинает существенно бояться за свои активы. В случае, когда крупный игрок обладает значительным запасом ресурсов с падением точности его сигнала, он начинает меньше времени ждать после осведомления, в то время как мелкие трейдеры, наоборот, увеличивают время ожидания. При этом момент краха отодвигается. При небольшом запасе ресурсов у крупного игрока и относительно неточном сигнале мелких агентов последние могут не менять свою стратегию при уменьшении точности сигнала крупного игрока (кроме перехода от абсолютно точного к немного неточному), в то время как крупный игрок будет сокращать время ожидания с ростом сигнала. В случае же небольшого объёма денежных средств у крупного игрока, но несильно зашумлённом сигнале у мелких игроков, начиная с размера окна, когда точность сигнала крупного игрока достигает точности сигнала мелких, при дальнейшем росте размера окна крупного игрока оптимальные стратегии игроков и момент краха не изменяются.

Таким образом, учёт в модели присутствия крупного игрока меняет свойства байесовского равновесия, сохраняя его единственность. При этом модель демонстрирует некоторые свойства, которые не наблюдаются в случае отсутствия крупного игрока на рынке.

Следует отметить, что на финансовых рынках присутствует множество крупных игроков. Поэтому в качестве продолжения представленного исследования следует рассмотреть, как измениться ситуация на финансовом рынке в случае присутствия двух и более крупных игроков.

Список литературы

1) Abreu, Dilip and Markus K. Brunnermeier, 2003, "Bubbles and Crashes," Econometria, Vol.71, No.1, 173-204

2) Allen, Morris и Postlewaite, 1993, "Finite Bubbles with Short Sale Constraints and Asymmetric Information", Journal of Economic Theory, 61, 206-229

3) Back, 1992, "Insider trading in continuous time", The Review of Financial Studies, volume 5, number 3, 387-409

4) Brunnermeier, M. K. and Nagel, 2002, "Arbitrage at its Limits: Hedge Funds and Technology Bubble", Mimeo, Princeton University

5) Cuoco and Cvitanic, 1998, "Optimal consumption choices for a 'large' investor", Journal of Economic Dynamics and Control, 22 (1998), 401-436

6) Daniel, K., D. Hirshleifer, and L.H. Subrahmanyam, 1998, "Investor Psychology and Security Market Under- and Overreaction", Journal of Finance, 53, 1839-1885

7) DeLong, J. B., A. Shleifer, L. H. Summers, R. J. Waldmann, 1990, "Noise Trader Risk in Financial Markets", Journal of Political Economy, 98, 703-738

8) Fama, E.F., 1965, "The Behavior of Stock-Market Prices," Journal of Business, 38, 34-105

9) Fama, E., 1970, ''Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work,'' Journal of Finance, 25, 383–417

10) Frey, R., Stremme A., 1997, "Market Volatility and Feedback Effects from Dynamic Hedging", Mathematical Finance, Vol. 7, No. 4 (October 1997), 351–375

11) Friedman, Milton, 1953, "Essay in Positive Economics"

12) Hirshleifer, D., 2001, “Investor Psychology”, Journal of Finance, 56, 1533-1597

13) Hirshleifer D. and Teoh S. H., Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution, Chapter 1, “Thought and Behavior Contagion in Capital Markets”, 1-56

14) Jarrow R. A., 1992, “Market Manipulation, Bubbles, Corners, and Short Squeezes”, Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.27, No.3, 311-337

15) Kyle, A., 1985, “Continuous Auctions and Insider Trading”, Econometrica, 53, 1315-1335

16) Surti J., 2001, Big is Better: The Role of Large Traders in Mitigating Coordination Risk, Job Market Paper, 1-42

17) Xavier Gabaix, Parameswaran Gopikrishnan, Vasiliki Plerou and H. Eugene Stanley, May 2006, “Institutional Investors and Stock Market Volatility”, Quarterly Journal of Economics, 461-485

Приложение

В приложении приведены программы численного счёта, реализованные в математическом пакете MATLAB 7.0.1.

Крупный игрок – инсайдер

В данном случае все расчёты и построения графиков приведены в одном файле.

```
% построение функции выигрыша крупного игрока
close all;
clear all;
% задаем параметры
g=0.3; % темп роста в новой экономики
r=0.05; % темп роста в старой экономики
n=7; % дисперсия мнений среди мелких игроков (окно получения
сигнала о переоценке актива
mu=0.47; % запас денежных средств крупного игрока
t0=3; % момент переоценки актива
c=0.01; % транзакционные издержки
lambda=0.1; % параметр экспоненциального распределения момен-
та переоценки
k_low=0.5; % минимальный объём средств у поведенческих аген-
тов
k_high=0.5; % максимальный объём средств у поведенческих
агентов
step=0.1; % точность
% решаем систему уравнений с 2 неизвестными:
% оптимальное время продажи для большого и маленьких игроков
    f1='(t0-t+k*n+tau)*(g-r)+exp((g-r)*(t0-t))-1=0';
    f2='lambda/(1-exp(lambda*(tau-t+t0)))-(g-r)/(1-exp((r-
g)*(t-t0)))=0';
for k=k_low:step:k_high
    %определяем, выгодно ли агенту пережидать и продавать
часть активов по лопнувшей цене
%подставляем числа вместо букв
        f1=subs(f1,'k',k);
        f1=subs(f1,'mu',mu);
        f1=subs(f1,'n',n);
        f1=subs(f1,'g',g);
        f1=subs(f1,'r',r);
        f1=subs(f1,'t0',t0);
        f2=subs(f2,'lambda',lambda);
        f2=subs(f2,'g',g);
        f2=subs(f2,'r',r);
        f2=subs(f2,'t0',t0);
%решаем систему уравнений
        [t,tau]=solve(f1,f2,'t','tau');
```

```
        tau=single(tau);
        if (tau<0)
            tau=0;
            f1=subs(f1,'tau',tau);
            t=solve(f1,'t');
        end
% чтобы подставить новое значение переменной цикла заново оп-
ределяем
        f1='(mu*n-t+t0+(k-mu)*n+tau)*(g-r)+exp((g-r)*(t0-t))-
1=0';
        f2='lambda/(1-exp(lambda*(tau-t+t0)))-(g-r)/(1-
exp((r-g)*(t-t0)))=0';
        t=single(t);
        if (t<=t0+(k-mu)*n+tau)
            tau=(log(1-(g-r)*(1-exp(lambda*(mu-
k)*n))/lambda))/(r-g)-(k-mu)*n;
            t=t0+(k-mu)*n+tau;
        end
        if (t>=t0+k*n+tau)
            display 'error '
        end
end
T=[0:20];
t_st=t0+(k-mu)*n+tau;
t_st_crash=t0+k*n+tau;
        for s=1:length(T)
            if (T(s)<=t_st)
                f(s)=mu*exp((g-r)*T(s))-c*mu;
            else if (T(s)>t_st)&(T(s)<=t_st_crash)
                f(s)=(mu-(T(s)-t_st)/n)*exp((g-
r)*T(s))+(T(s)-t_st)/n*exp((g-r)*t0)-c*mu;
            else
                f(s)=mu*exp((g-r)*t0)-c*mu;
            end
            end
        end
%вывод результата на экран
plot(T,0*T,'-','color',[0 0 0],'LineWidth',1);hold on;
plot(T,f,'-','color',[1 0 0],'LineWidth',2);hold on;
set(gca,...
    'XLim',[0 10],...
    'YLim',[0 2],...
    'XTick',[t_st t_st_crash],...
    'YTick',[0:1:2],...
    'FontSize',15);
xlabel('{\it t}','FontSize',20);
ylabel('{\it Payoff_t}','FontSize',20);
text(0.7,1.5,'This is a payoff function of large trader (in-
sider)','color',[1 0 0],'FontSize',15);
```

```
% поиск оптимального момента продажи для большого игрока и
маленьких при различных к (количестве средств "квази-шумных"
агентов)
close all;
clear all;
% задаем параметры
g=0.2;
r=0.05;
n=7;
mu=0.4;
t0=3;
c=0.01;
lambda=0.1;
k_low=0.41;
k_high=0.9;
step=0.01;
% решаем систему уравнений с 2 неизвестными:
% оптимальное время продажи для большого и маленьких игроков
    f1='(t0-t+k*n+tau)*(g-r)+exp((g-r)*(t0-t))-1=0';
    f2='lambda/(1-exp(lambda*(tau-t+t0)))-(g-r)/(1-exp((r-
g)*(t-t0)))=0';
s=1;
for k=k_low:step:k_high
    %выгодно ли агенту пережидать и продавать часть активов
по лопнувшей цене
%подставляем числа вместо букв
        f1=subs(f1,'k',k);
        f1=subs(f1,'mu',mu);
        f1=subs(f1,'n',n);
        f1=subs(f1,'g',g);
        f1=subs(f1,'r',r);
        f1=subs(f1,'t0',t0);
        f2=subs(f2,'lambda',lambda);
        f2=subs(f2,'g',g);
        f2=subs(f2,'r',r);
        f2=subs(f2,'t0',t0);
%решаем систему уравнений
        [t,tau]=solve(f1,f2,'t','tau');
        tau=single(tau);
        if (tau<0)
            tau=0;
            f1=subs(f1,'tau',tau);
            t=solve(f1,'t');
        end
% чтобы подставить новое значение переменной цикла, функции
определяются заново
        f1='(mu*n-t+t0+(k-mu)*n+tau)*(g-r)+exp((g-r)*(t0-t))-
1=0';
        f2='lambda/(1-exp(lambda*(tau-t+t0)))-(g-r)/(1-
exp((r-g)*(t-t0)))=0';
        t=single(t);
        if (t<=t0+(k-mu)*n+tau)
```

```
            display 'kraevoe ',k
            tau=(log(1-(g-r)*(1-exp(lambda*(mu-
k)*n))/lambda))/(r-g)-(k-mu)*n;
            t=t0+(k-mu)*n+tau;
        end
        if (t>=t0+k*n+tau)
            display 'error '
        end
    tau_LT(s)=t-t0;
    tau_st(s)=tau;
    s=s+1;
end
T=[0,20];
k=[k_low:step:k_high];
%графики%
plot(T,0*T,'-','color',[0 0 0],'LineWidth',1);hold on;
plot(k,tau_LT,'-','color',[1 0 0],'LineWidth',2);hold on;
plot(k,tau_st,'-','color',[0 0 1],'LineWidth',2);hold on;
set(gca,...
    'XLim',[0.3 1],...
    'YLim',[-1 4.2],...
    'XTick',[0.3:0.1:1],...
    'YTick',[0:1:4],...
    'FontSize',15);
xlabel('{\it k}','FontSize',10);
ylabel('{\it best response}','FontSize',10);
text(0.5,3.7,'Large trader (insider)','color',[1 0
0],'FontSize',10);
text(0.5,0.5,'small traders','color',[0 0 1],'FontSize',10);

% поиск оптимального времени ожидания после осведомления и до
продажи продажи для крупного и мелких игроков в зависимости
от ресурсов крупного игрока
close all;
clear all;
% задаем параметры
g=0.2;
r=0.05;
n=7;
k=0.9;
t0=3;
c=0.01;
lambda=0.1;
mu_low=0;
mu_high=k;
step=0.01;
% решаем систему уравнений с 2 неизвестными:
% оптимальное время продажи для большого и маленьких игроков
    f1='(t0-t+k*n+tau)*(g-r)+exp((g-r)*(t0-t))-1=0';
    f2='lambda/(1-exp(lambda*(tau-t+t0)))-(g-r)/(1-exp((r-
g)*(t-t0)))=0'
s=1;
```

```
for mu=mu_low:step:mu_high
%подставляем числа вместо букв
        f1=subs(f1,'k',k);
        f1=subs(f1,'mu',mu);
        f1=subs(f1,'n',n);
        f1=subs(f1,'g',g);
        f1=subs(f1,'r',r);
        f1=subs(f1,'t0',t0);
        f2=subs(f2,'lambda',lambda);
        f2=subs(f2,'g',g);
        f2=subs(f2,'r',r);
        f2=subs(f2,'t0',t0);
%решаем систему уравнений
        [t,tau]=solve(f1,f2,'t','tau');
        tau=single(tau);
        if (tau<0)
            tau=0;
            f1=subs(f1,'tau',tau);
            t=solve(f1,'t');
        end
% чтобы подставить новое значение переменной цикла заново оп-
ределяем
        f1='(mu*n-t+t0+(k-mu)*n+tau)*(g-r)+exp((g-r)*(t0-t))-
1=0';
        f2='lambda/(1-exp(lambda*(tau-t+t0)))-(g-r)/(1-
exp((r-g)*(t-t0)))=0';
        t=single(t);
        if (t<=t0+(k-mu)*n+tau)
            display 'kraevoe ', mu
            tau=(log(1-(g-r)*(1-exp(lambda*(mu-
k)*n))/lambda))/(r-g)-(k-mu)*n;
            t=t0+(k-mu)*n+tau;
        end
        if (t>=t0+k*n+tau)
            display 'error '
        end
    tau_LT(s)=t-t0;
    tau_st(s)=tau;
    s=s+1;
end
%вывод результата на экран
T=[0:20];
mu=[mu_low:step:mu_high];
%графики%
plot(T,0*T,'-','color',[0 0 0],'LineWidth',1);hold on;
plot(mu,tau_LT,'-','color',[1 0 0],'LineWidth',2);hold on;
plot(mu,tau_st,'-','color',[0 0 1],'LineWidth',2);hold on;
set(gca,...
    'XLim',[0 1],...
    'YLim',[-0.5 9],...
    'XTick',[0:0.1:1],...
    'YTick',[0:1:9],...
```

```
    'FontSize',15);
xlabel('{\it mu}','FontSize',10);
ylabel('{\it best response of small traders}','FontSize',10);
text(0.5,4.1,'Large trader (insider)','color',[1 0
0],'FontSize',10);
text(0.5,0.8,'small traders','color',[0 0 1],'FontSize',10);
```

Все прочие графики, приведённые в работе строятся аналогично.

Крупный игрок получает шумный сигнал

Код представляет собой набор процедур и функций. Итоговая процедура, в которой производится построение графиков, носит название main с добавлением объясняющего параметра.

```
function res_s=s_st(t,t0,tau_st,n)
%Функция определяет суммарное давление маленьких игроков при
задаваемых параметрах t,t0,tau_st,n
pt=t-t0-tau_st;
if (pt<=0)
   res_s=0;
else if (pt>0)&(pt<n)
   res_s=pt/n;
else
   res_s=1;
end
end

function res_s=s_LT(t,t_LT,tau_LT,n_LT,mu)
% Функция определяет давление большого игрока
if (t<t_LT+tau_LT)
    res_s=0;
else
    res_s=mu;
end


function res_s=s(t,t0,t_LT,tau_LT,tau_st,n,mu)
% Функция определяет суммарное давление на цену со стороны
крупного и мелких игроков в заданный момент времени
if ((t0<t-tau_st-n)&(t_LT<=t-tau_LT))
     res_s=1+mu;
end
if ((t0<t-tau_st-n)&(t_LT>t-tau_LT))
     res_s=1;
end
if ((t0>=t-tau_st-n)&(t0<t-tau_st)&(t_LT<=t-tau_LT))
    res_s=mu+(t-t0-tau_st)/n;
end
```

```
if ((t0>=t-tau_st-n)&(t0<t-tau_st)&(t_LT>t-tau_LT))
    res_s=(t-t0-tau_st)/n;
end
if ((t0>=t-tau_st)&(t_LT<=t-tau_LT))
    res_s=mu;
end
if ((t0>=t-tau_st)&(t_LT>t-tau_LT))
    res_s=0;
end

function res_s=P_i(t,t0,tau_LT,tau_st,n,n_LT,mu,k,v,g,r)
%рассчитывается функция P_i (условная функция выигрыша при
условии, что агент точно знает момент переоценки актива) для
функции выигрыша мелкого игрока
if ((t0<=t-tau_st-n*k)||((t0>t-tau_st-n*k)&(t0<=t-tau_st-
n*(k-mu))&(t-tau_LT>t0+n_LT)))
     res_s=exp((g-r)*t0)*v;
end
if ((t0>t-tau_st-n*k)&(t0<=t-tau_st-n*(k-mu))&(t0<t-
tau_LT)&(t0+n_LT>=t-tau_LT))
     res_s=v*(exp((g-r)*t0)*(t-tau_LT-t0)+exp((g-
r)*t)*(t0+n_LT-t+tau_LT))/n_LT;
end
if ((t0>t-tau_st-n*(k-mu))||((t0>t-tau_st-n*k)&(t0<=t-tau_st-
n*(k-mu))&(t-tau_LT<=t0)))
    res_s=exp((g-r)*t)*v;
end

function res_s=P_LT(t,t0,tau_st,n,k,mu,g,r)
% рассчитывается функция P_LT (условная функция выигрыша при
условии, что агент точно знает момент переоценки актива) для
функции выигрыша крупного игрока
sk=s_st(t,t0,tau_st,n)-k;
et=exp((g-r)*t);
ep=exp((g-r)*t0);
if (sk<=-mu)
     res_s=mu*et;
else if (sk>-mu)&(sk<0)
     res_s=-sk*et+(sk+mu)*ep;
else
     res_s=mu*ep;
end
end


function
res_s=PayOff_st(t,t_i,tau_LT,tau_st,n,n_LT,mu,k,v,g,r,lambda,
c,delta)
%рассчитывается функция выигрыша мелкого игрока
if (t_i-n)<0
    limit_int_low=0;
    znamenatel=exp(lambda*t_i)-1;
```

```
else
    limit_int_low=t_i-n;
    znamenatel=exp(lambda*n)-1;
end
phi_vec=[limit_int_low:delta:t_i];
res_s=0;
for j=1:length(phi_vec)-1
res_s=res_s+(P_i(t,phi_vec(j),tau_LT,tau_st,n,n_LT,mu,k,v,g,r
)*lambda*exp(lambda*(t_i-
phi_vec(j)))/znamenatel+P_i(t,phi_vec(j+1),tau_LT,tau_st,n,n_
LT,mu,k,v,g,r)*lambda*exp(lambda*(t_i-
phi_vec(j+1)))/znamenatel)*delta/2;
end
res_s=res_s-c*v;


function
res_s=PayOff_LT(t,t_LT,tau_st,n,n_LT,k,mu,g,r,lambda,c,delta)
%рассчитывается функция выигрыша крупного игрока
if (t_LT-n_LT)<0
    limit_int_low=0;
    znamenatel=exp(lambda*t_LT)-1;
else
    limit_int_low=t_LT-n_LT;
    znamenatel=exp(lambda*n_LT)-1;
end
phi_vec=[limit_int_low:delta:t_LT];
res_s=0;
for j=1:length(phi_vec)-1
res_s=res_s+(P_LT(t,phi_vec(j),tau_st,n,k,mu,g,r)*lambda*exp(
lambda*(t_LT-
phi_vec(j)))/znamenatel+P_LT(t,phi_vec(j+1),tau_st,n,k,mu,g,r
)*lambda*exp(lambda*(t_LT-phi_vec(j+1)))/znamenatel)*delta/2;
end
res_s=res_s-c*mu;

function
res_s=pressure_k_mu(t0,t_LT,tau_LT,tau_st,n,mu,k,tau_presicio
n)
%функция определяет момент времени, когда давление на цену
составляет k-mu
a=0;
b=20;
while ((b-a)>tau_presicion)
    av=(a+b)/2;
    if (s(av,t0,t_LT,tau_LT,tau_st,n,mu)-(k-mu)>0)
        b=av;
    else
        a=av;
    end
end
res_s=(a+b)/2;
```

main_mu файл

```
% строит график зависимости оптимального времени ожидания по-
сле осведомлении и до продажи мелких и крупного игрока от за-
пасов ресурсов крупного игрока
close all;
clear all;
% задаем параметры
v=0.01;
g=0.2;
r=0.05;
n=10;
n_LT=10;
lambda=0.1;
k=0.9;
t0=3;
c=0.01;
t_i=t0+n;
t_LT=t0+n_LT;
delta=0.01;
t_high=t0+n+5;
t_presicion=0.01;
tau_presicion=0.01;
for i=1:10
    mu(i)=-0.1+0.1*i
taust(i)=f_equil_0(t_i,t_LT,n,n_LT,mu(i),k,v,g,r,c,lambda,del
ta,t_high,t_presicion,tau_presicion)

tauLT(i)=tau_LT_opt(t_high,t_presicion,lambda,t_LT,n_LT,k,mu(
i),g,r, delta, n, taust(i),c)
end
```

main_mu_t_crash файл

```
% строит график зависимость момента краха игрока от запасов
ресурсов крупного игрока
close all;
clear all;
% задаем параметры
mu=0.5;
v=0.01;
g=0.3;
r=0.05;
n=3;
lambda=0.1;
k=0.9;
t0=5;
c=0.01;
t_i=t0+n;
t_LT=t0+n_LT;
delta=0.01;
```

```
t_high=t0+n+10;
t_presicion=0.01;
tau_presicion=0.01;
for i=1:10
    mu(i)=-0.1+i*0.1;
taust(i)=f_equil_0(t_i,t_LT,n,n_LT,mu(i),k,v,g,r,c,lambda,del
ta,t_high,t_presicion,tau_presicion)
tauLT(i)=tau_LT_opt(t_high,t_presicion,lambda,t_LT,n_LT,k,mu(
i),g,r, delta, n, taust(i),c)
tcrash(i)=t_crash(t0,t_LT,tauLT(i),taust(i),n,mu(i),k,tau_pre
sicion)
end
plot(mu,0*mu,'-','color',[0 0 0],'LineWidth',1);hold on;
plot(mu,tcrash,'-','color',[1 0 0],'LineWidth',2);hold on;
set(gca,...
    'XLim',[0 1],...
    'YLim',[0 20],...
    'XTick',[0:0.1:1],...
    'YTick',[0:1:20],...
    'FontSize',17);
xlabel('{\it \mu}','FontSize',20);
ylabel('{\it t_c_r_a_s_h}','FontSize',20);
hold on
text(8.81,10,'t_c_r_a_s_h','color',[1 0 0],'FontSize',10);
```

main_n_LT файл

```
% строит график зависимости оптимального времени ожидания по-
сле осведомлении и до продажи мелких и крупного игрока от
точности сигнала крупного игрока
close all;
clear all;
% задаем параметры
mu=0.1;
v=0.01;
g=0.2;
r=0.05;
n=10;
lambda=0.1;
k=0.9;
t0=5;
c=0.01;
t_i=t0+n;
t_LT=t0+3;
delta=0.01;
t_high=t0+n+10;
t_presicion=0.01;
tau_presicion=0.01;
for i=1:100
    n_LT(i)=0.01*i-0.01;
taust(i)=f_equil_0(t_i,t_LT,n,n_LT(i),mu,k,v,g,r,c,lambda,del
ta,t_high,t_presicion,tau_presicion)
```

```
tauLT(i)=tau_LT_opt(t_high,t_presicion,lambda,t_LT,n_LT(i),k,
mu,g,r, delta, n, taust(i),c)
end
plot(n_LT,0*n_LT,'-','color',[0 0 0],'LineWidth',1);hold on;
plot(n_LT,taust,'-','color',[1 0 0],'LineWidth',2);hold on;
plot(n_LT,tauLT,'-','color',[1 0 1],'LineWidth',2);hold on;
set(gca,...
    'XLim',[0 10],...
    'YLim',[0 11],...
    'XTick',[0:1:10],...
    'YTick',[0:1:11],...
    'FontSize',15);
xlabel('{\it \eta_L_T}','FontSize',10);
ylabel('{\it \tau}','FontSize',10);
text(8.81,7.5,'\tau_s_t','color',[1 0 0],'FontSize',10);
text(8.81,10.5,'\tau_L_T','color',[1 0 1],'FontSize',10);
hold on
```